# EJERCICIOS PROPUESTOS

# CURSO DE ANÁLISIS COMPLEJO

18-Diciembre-2007 (Escritorio/EjAMII/EjerPrII4.tex)

**Capítulo 4.**

**Forma general del teorema de Cauchy.**

**pp. 141 - 244**

### 4.3.2. Ejercicios Propuestos (p. 160)

**Ejerc. 141 - 148**

**Ejercicio Propuesto 141.**
*Considera las curvas:*

$$\gamma_1(t) = t, \quad \forall t \in [-1, 1]; \quad \gamma_2(t) = e^{it} \quad \forall t \in [0, \pi] \quad y \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

*Calcula* $Ind_\gamma(z)$ *para cada* $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*$.

**Solución.**
$\mathbb{C} \backslash \gamma^*$ tiene dos componentes conexas:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \quad \text{y} \quad Imz > 0\} \qquad \text{y} \qquad B = \mathbb{C} \backslash \overline{A}.$$

Como $B$ es la componente conexa no acotada, sabemos que

$$Ind_\gamma(z) = 0, \quad \forall z \in B.$$

Dado $z \in A$, si parametrizamos $\gamma$ por:

$$\gamma : [-1, 1 + \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & si \quad -1 \leq t \leq 1 \\ e^{i(t-1)} & si \quad 1 \leq t \leq 1 + \pi \end{cases}$$

y consideramos la circunferencia unidad parametrizada por

$$\sigma : [-1, 1 + \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} & si \quad -1 \leq t \leq 1 \\ e^{i(t-1)} & si \quad 1 \leq t \leq 1 + \pi \end{cases}$$

Es claro que la función

$$F : [0, 1] \times [-1, \pi + 1] \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{z\}$$

definida por

$$F(s, t) = \gamma(t) + s(\sigma(t) - \gamma(t))$$

muestra que $\gamma$ y $\sigma$ son homotópicas en $\mathbb{C} \backslash \{z\}$. Por el Lema 4.16, $\gamma$ y $\sigma$ son homológicamente equivalentes respecto de $\mathbb{C} \backslash \{z\}$, luego

$$Ind_\gamma(z) = Ind_\sigma(z) = 1.$$

■

**Ejercicio Propuesto 142.**
*Sea $w \in \mathbb{C}^*$ y $\gamma$ un camino en $\mathbb{C}^*$ cuyo origen es 1 y cuyo extremo es $w$. Justifica que $\int_\gamma \frac{dz}{z} \in Log(w)$.*

**Solución.**
Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un camino tal que $\gamma(a) = 1$ y $\gamma(b) = w$. Por el Teorema 4.1 existe

$$\theta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua tal que

$$\theta(t) \in Arg(\gamma(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

Claramente la aplicación

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\varphi(t) = log\,|\gamma(t)| + i\theta(t)$$

es un logaritmo continuo de $\gamma$. Por la Proposición 1.47, $\varphi$ es derivable a trozos en $[a,b]$ con derivada

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}, \quad \forall t \in [a,b].$$

Entonces, por la Regla de Barrow

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \varphi(b) - \varphi(a) =$$

$$log\,|\gamma(b)| + i\theta(b) - (log\,|\gamma(a)| + i\theta(a)) =$$

$$log\,|w| + i\theta(b) - (log\,1 + i\theta(a)) =$$

$$log\,|w| + i(\theta(b) - \theta(a)).$$

Como quiera que $\theta(b) \in Arg(w)$ y $\theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene que

$$\theta(b) - \theta(a) \in Arg(w),$$

y por tanto

$$log\,|w| + i(\theta(b) - \theta(a)) \in Log\,(w).$$

■

**Ejercicio Propuesto 143.**
*Prueba que si $\Omega$ es un dominio estrellado, $\mathbb{C}\backslash\Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.*

**Solución.**
Si $\Omega = \mathbb{C}$ es claro. Supongamos que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Sea $z_0$ un centro de estrella para $\Omega$. Dado $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ se tiene que la semirrecta de origen $a$ y con dirección $a - z_0$

$$S = \{a + t(a - z_0) : t \geq 0\}$$

está contenida en $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Como $S$ es un conexo no acotado que contiene a $a$ y que está contenido en $\mathbb{C}\backslash\Omega$, se sigue que la componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\Omega$ que contiene a $a$ es no acotada.

■

**Ejercicio Propuesto 144.**
*Prueba que todo disco abierto es simplemente conexo.*

**Solución.**
Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada en $D(z_0, \rho)$, entonces la aplicación $H : [0, 1] \times [a, b] \to D(z_0, \rho)$ definida por

$$H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + sz_0$$

es continua y verifica
$H_0 = \gamma$,
$H_s$ esta continua en $D(z_0, \rho)$, y
$H_1$ es constantemente $z_0$.

■

**Ejercicio Propuesto 145.**
*Prueba que si dos abiertos son homeomorfos y uno de ellos es simplemente conexo el otro también lo es.*

**Solución.**
Sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ dos abiertos de $\mathbb{C}$ homeomorfos, y sea $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un

homeomorfismo. Sea $\gamma : [a,b] \to \Omega_2$ una curva cerrada en $\Omega_2$. Entonces $\varphi^{-1} \circ \gamma : [a,b] \to \Omega_1$ es una curva cerrada en $\Omega_1$. Puesto que $\Omega_1$ es simplemente conexo, existe $z_0 \in \Omega_1$ y existe

$$H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

aplicación continua tal que $H_0 = \varphi^{-1} \circ \gamma$, $H_s$ es una curva cerrada en $\Omega_1$ y $H_1$ es la curva constantemente $z_0$. Consideremos la aplicación

$$\varphi \circ H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}.$$

Es claro que $\varphi \circ H$ es continua, $(\varphi \circ H)_0 = \gamma$, $(\varphi \circ H)_s$ es una curva cerrada en $\Omega_2$, y $(\varphi \circ H)_1$ es la curva constantemente $\varphi(z_0)$.

■

**Ejercicio Propuesto 146.**
*Sea* $\alpha : [0, +\infty[ \to \mathbb{C}$ *una función continua tal que*

$$\alpha(0) = 0 \quad y \quad \lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = \infty.$$

*Justifica que el conjunto* $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{\alpha(t) : t \geq 0\}$ *es abierto y que existe* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $exp(f(z)) = z$ *para todo* $z \in \Omega$.

**Solución.**
Veamos que el conjunto

$$\{\alpha(t) : t \geq 0\}$$

es cerrado. Supongamos que $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 = \lim \alpha(t_n)$ para $\{t_n\}$ sucesión en $[0, +\infty[$. Como $\lim_{z \to \infty} \alpha(t) = \infty$, deberá ocurrir que $\{t_n\}$ está acotada. Luego existe una parcial $\{t_{\sigma(n)}\} \to t_0 \geq 0$. Como $\alpha$ es continua se tiene que $\{\alpha(t_{\sigma(n)})\} \to \alpha(t_0)$, y por tanto $z_0 = \alpha(t_0)$. En consecuencia, $\Omega$ es abierto.

Como quiera que $\mathbb{C} \backslash \Omega = \{\alpha(t) : t \geq 0\}$ es conexo y no acotado, ésta es la única componente conexa de $\mathbb{C} \backslash \Omega$, y por cierto es no acotada. Por la Proposición 4.18, $\Omega$ es homológicamente conexo. Como $0 \notin \Omega$ (ya que $\alpha(0) = 0$), la aplicación inclusión de $\Omega$ en $\mathbb{C}$ no toma el valor cero, y por tanto, por el Teorema 4.13, tiene logaritmos holomorfos en $\Omega$:

$$\exists f \in \mathcal{H}(\Omega) : e^{f(z)} = z, \quad \forall z \in \Omega.$$

■

**Ejercicio Propuesto 147.**
*Sea $\Omega$ un abierto simplemente conexo del plano que no contiene al cero y contiene a $\mathbb{R}^+$. Justifica que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x) = x^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. ¿Puede suprimirse la hipótesis de que $\Omega$ sea simplemente conexo?*

**Solución.**
1) Como $\Omega$ es simplemente conexo, por el Corolario 4.20, $\Omega$ es un abierto homológicamente conexo. Como $0 \notin \Omega$, por el Teorema 4.13, hay logaritmos holomorfos en $\Omega$, esto es, existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$e^{h(z)} = z, \qquad \forall z \in \Omega.$$

En particular,

$$e^{h(x)} = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

y por tanto

$$h(x) \in Log(x) = log(x) + 2\pi i\mathbb{Z}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Como $h$ es continua y $\mathbb{R}^+$ es conexo, se sigue que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$h(x) = log(x) + 2k\pi i, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Así, la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = h(z) - 2k\pi i$$

es una función holomorfa en $\Omega$ tal que

$$g(x) = log(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Consideremos la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^{zg(z)}.$$

Es claro que $f$ es holomorfa y

$$f(x) = e^{xg(x)} = e^{xlog(x)} = x^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

2) Sea $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, y supongamos que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$f(x) = x^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Por el principio de identidad aplicado en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$, se tiene que

$$f(z) = e^{z\,log(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-.$$

Luego

$$f'(z) = (log(z)+1)e^{z\,log(z)} = (log(z)+1)f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-,$$

y por tanto

$$log(z)f(z) = f'(z) - f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-.$$

Como $f' - f$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, y en particular continua, se sigue que para todo $z_0 \in \mathbb{R}^-$ se verifica que

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ Im(z)>0}} (f'(z) - f(z)) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ Im(z)<0}} (f'(z) - f(z)),$$

y por tanto

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ Im(z)>0}} (log(z)f(z)) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ Im(z)<0}} (log(z)f(z)),$$

luego

$$(log \mid z_0 \mid -\pi i)f(z_0) = (log \mid z_0 \mid +\pi i)f(z_0),$$

y por tanto $2\pi i f(z_0) = 0$. Luego $f(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{R}^-$. El principio de identidad nos diría que $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, lo cual es absurdo.

■

**Ejercicio Propuesto 148.**
*Sea $\gamma$ la elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a$ y $b$. Calcula de dos formas distintas la integral*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

*y deduce el valor de*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 cos^2\,t + b^2 sen^2\,t}.$$

**Solución.**
Puesto que

$$1 = Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

se sigue que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$
De otra manera, la función $\frac{1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y el ciclo $\gamma - C(0,1)$ es nulhomólogo respecto de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, luego por el Teorema de Cauchy
$$\int_{\gamma - C(0,1)} \frac{dz}{z} = 0,$$
y por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$
La ecuación implícita de $\gamma$ es
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
y la ecuación paramétrica de $\gamma$ viene dada por
$$\left.\begin{array}{r} x = acost \\ y = bsent \end{array}\right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$
Luego una representación paramétrica de $\gamma$ viene dada por $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = a\,cos\,t + ib\,sen\,t.$$
Luego
$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\,sen\,t + ib\,cos\,t}{a\,cos\,t + ib\,sen\,t}\,dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{(-a\,sen\,t + ib\,cos\,t)(a\,cos\,t - ib\,sen\,t)}{a^2cos^2t + b^2sen^2t}\,dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{-a^2sen\,t\,cos\,t + b^2sen\,t\,cos\,t + i(ba\,cos^2t + ab\,sen^2t)}{a^2cos^2t + b^2sen^2t}\,dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)sen\,tcos\,t}{a^2cos^2t + b^2sen^2t}\,dt + iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2cos^2t + b^2sen^2t},$$
y por tanto,
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2cos^2t + b^2sen^2t} = \frac{2\pi}{ab}.$$
■

### 4.5.4. Ejercicios Propuestos (p. 183)

**Ejerc. 149 - 159**

**Ejercicio Propuesto 149.**
*Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\})$$

*en cada uno de los anillos siguientes:* $A(1;0,2)$ *y* $A(1;2,+\infty)$.

**Solución.**
Claramente $f$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, ya que $-1$ y $1$ son los ceros del denominador. Además, podemos escribir:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}).$$

Vamos a calcular el desarrollo en serie de Laurent de $f$ en el anillo $A(1;0,2)$.

Notemos que

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+z-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})} =$$

(para $z$ con $|z-1|<2$)

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z-1}{2})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n, \quad \forall z \in A(1;0,2).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n, \quad \forall z \in A(1;0,2).$$

Luego

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^{n-2} =$$

$$\sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n, \quad \forall z \in A(1;0,2).$$

Vamos a calcular el desarrollo en serie de Laurent de $f$ en el anillo $A(1;2,+\infty)$.

Nótese que

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{2}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1-(-\frac{2}{z-1})}=$$

(para $z$ con $|z-1|>2$)

$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{(z-1)^{n+1}},\quad \forall z\in A(1;2,+\infty).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{(z+1)^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-(-1)^n\,2^n(n+1)(z-1)^n}{(z-1)^{2n+2}}=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}},\quad \forall z\in A(1;2,+\infty).$$

Luego

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2^n(n+1)}{(z-1)^{n+4}}=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-4}(-1)^n\,2^{-n-4}(-n-3)(z-1)^n,\quad \forall z\in A(1;2,+\infty).$$

■

**Ejercicio Propuesto 150.**
*Clasifica las singularidades de las siguientes funciones y calcula los residuos correspondientes (incluyendo el punto $\infty$ cuando tenga sentido).*

$$a)\ \frac{1-cos z}{z^m}\qquad b)\ z^m sen(\frac{1}{z})\qquad c)\ \frac{1}{z(1-e^{2\pi iz})}\qquad d)\ \frac{z}{tg\,\pi z}\qquad e)\ \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$$

**Solución.**

a)

$$f(z) = \frac{1 - cosz}{z^m} \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

Claramente la función es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Consideremos la función entera $g(z) = 1 - cosz$. Puesto que $g'(z) = senz$ y $g''(z) = cosz$, y por tanto $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 1 \neq 0$, se sigue que $g$ tiene un cero doble en 0. Por tanto existe una función entera $\varphi$ tal que $\varphi(0) \neq 0$ y

$$g(z) = z^2\varphi(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En consecuencia,

$$f(z) = \frac{1 - cosz}{z^m} = z^{2-m}\varphi(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Luego $f$ es una función regular en 0 cuando $m \leq 2$, y además tiene un cero de orden $2 - m$ en 0 cuando $m \leq 1$. También se sigue que $f$ tiene un polo de orden $m - 2$ en 0 si $m > 2$.

Como quiera que

$$cosz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

se sigue que

$$1 - cosz = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Luego el desarrollo en serie de Laurent de $f$ en 0 viene dado por

$$f(z) = \frac{1 - cosz}{z^m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-m}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Lo que pone de manifiesto que

si $m \leq 2$, entonces $f$ es regular en 0, y por tanto $Res(f, 0) = 0$,

mientras que si $m < 2$, entonces $f$ tiene un polo en 0 de orden $m - 2$, en cuyo caso, puesto que

$$2n - m = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n = m - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{m-1}{2},$$

se sigue que

Si $m$ es par entonces

$$Res(f,0) = 0.$$

Si $m$ es impar entonces

$$Res(f,0) = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!}.$$

Estudiemos el punto $\infty$. Para ello consideremos la función $F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{1 - cos\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^m}} = z^m(1 - cos\frac{1}{z}).$$

Por lo anterior,

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{m-2n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Luego $F$ tiene en 0 una singularidad esencial, y por tanto $f$ tiene en $\infty$ una singularidad esencial. Además, por definición, el residuo de $f$ en $\infty$ viene dado por

$$Res(f,\infty) = -c_1$$

Como quiera que

$$m - 2n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n = m - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{1}{2}(m-1)$$

se sigue que

$$\begin{cases} Res(f,\infty) &= & 0 & \text{si} & m & \text{es par} \\ Res(f,\infty) &= & -\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!} & \text{si} & m & \text{es impar} \end{cases}$$

(Como tenía que ser a la vista del ejercicio 157).

b)

$$z^m sen(\frac{1}{z}) \;\; (m \in \mathbb{Z})$$

Claramente la función
$$f(z) = z^m sen\frac{1}{z}$$
es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como quiera que
$$sen\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$
se sigue
$$sen\, \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, \frac{1}{z^{2n+1}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$
y por tanto
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{m-2n-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$
Luego $f$ tiene una singularidad esencial en 0. Además, como quiera que
$$m - 2n - 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n = m \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{m}{2},$$
se sigue que
$$\begin{cases} Res(f,0) & = & 0 & \text{si} & m & \text{es impar} \\ Res(f,0) & = & \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!} & \text{si} & m & \text{es par} \end{cases}$$

Estudiemos la singularidad en $\infty$. Para ello consideremos la función $F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por
$$F(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^m} sen\frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{senz}{z^m}.$$
Por lo anterior,
$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1-m}.$$
Para $m \leq 1$, $F$ tiene una singularidad evitable en 0, luego $f$ es regular en $\infty$. Además, en este caso,
$$Res(f,\infty) = -c_1 = 0$$

Para $m > 1$, $F$ tiene un polo en 0 de orden $m-1$, luego $f$ tiene un polo en $\infty$ de orden $m-1$. Además, en este caso,

$$\begin{cases} Res(f,\infty) & = & -c_1 & = & 0 & \text{si} & m & \text{es impar} \\ Res(f,\infty) & = & -c_1 & = & -\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m-1)!} & \text{si} & m & \text{es par} \end{cases}$$

(Como tenía que ser a la vista del ejercicio 157).

c)

$$f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2\pi i z})}$$

Como quiera que

$$1 - e^{2\pi i z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\pi i z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi i z \in 2\pi i\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{Z}$$

se sigue que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$. Dado $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ se tiene que

$$\lim_{z\to k}(z-k)f(z) = \lim_{z\to k}\frac{-\frac{1}{z}}{\frac{e^{2\pi i z}-e^{2\pi i k}}{z-k}} = \frac{-\frac{1}{k}}{\frac{d}{dz}(e^{2\pi i z})_{z=k}} = \frac{-\frac{1}{k}}{2\pi i e^{2\pi i k}} = -\frac{1}{2\pi i k}.$$

Luego $f$ tiene un polo de orden 1 en $k$ y además

$$Res(f,k) = -\frac{1}{2\pi i k}.$$

Como quiera que

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{1-e^{2\pi i z}} = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{\frac{e^{2\pi i z}-1}{z}} = -\frac{1}{2\pi i},$$

se sigue que $f$ tiene un polo de orden 2 en 0. Sabemos que

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[\frac{z}{1-e^{2\pi i z}}] = \lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2\pi i z}+2\pi i z e^{2\pi i z}}{(1-e^{2\pi i z})^2} =$$

(Se aplica L'Hôpital)

$$\lim_{z\to 0}\frac{-2\pi i e^{2\pi i z}+2\pi i e^{2\pi i z}+(2\pi i)^2 z e^{2\pi i z}}{2(1-e^{2\pi i z})\,2\pi i e^{2\pi i z}} = \lim_{z\to 0}\frac{2\pi i z}{-2(1-e^{2\pi i z})} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\pi i}{\frac{e^{2\pi i z}-1}{z}}=\frac{\pi i}{\frac{d}{dz}(e^{2\pi i z})_{z=0}}=\frac{\pi i}{2\pi i}=\frac{1}{2}.$$

No tiene sentido estudiar la singularidad en $\infty$.

d)

$$f(z)=\frac{z}{tg\,\pi z}.$$

Como quiera que

$$tg\,\pi z=\frac{sen\,\pi z}{cos\,\pi z}$$

esta definida en $\mathbb{C}\backslash\{k+\frac{1}{2}:k\in\mathbb{Z}\}$ y se anula en $\mathbb{Z}$, la función $f$ está definida en

$$\Omega=\mathbb{C}\backslash[\mathbb{Z}\cup\{k+\frac{1}{2}:k\in\mathbb{Z}\}].$$

Dado $k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{z\to k+\frac{1}{2}}f(z)=\lim_{z\to k+\frac{1}{2}}\frac{z}{\frac{sen\,\pi z}{cos\,\pi z}}=\lim_{z\to k+\frac{1}{2}}\frac{z\,cos\,\pi z}{sen\,\pi z}=$$

$$\frac{(k+\frac{1}{2})\,cos\,(k+\frac{1}{2})\pi}{sen\,(k+\frac{1}{2})\pi}=\frac{(k+\frac{1}{2})\,0}{(-1)^k}=0.$$

Luego $f$ presenta en $k+\frac{1}{2}$ una singularidad evitable. Dado $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$\lim_{z\to k}(z-k)f(z)=\lim_{z\to k}z\,cos\,\pi z\,\frac{1}{\frac{sen\,\pi z}{z-k}}=\lim_{z\to k}z\,cos\,\pi z\,\frac{1}{\frac{sen\,\pi z-sen\,\pi k}{z-k}}=$$

$$k\,cos\,k\pi\,\frac{1}{\frac{d}{dz}(sen\,\pi z)_{z=k}}=\frac{k\,cos\,k\pi}{\pi\,cos\,k\pi}=\frac{k}{\pi}.$$

Luego $f$ tiene un polo de orden 1 en $k$ y

$$Res(f,k)=\frac{k}{\pi}.$$

En $k=0$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\,cos\,\pi z}{sen\,\pi z}=\lim_{z\to 0}\frac{cos\,\pi z}{\frac{sen\,\pi z}{z}}=\frac{cos\,0}{\frac{d}{dz}(sen\,\pi z)_{z=0}}=\frac{cos\,0}{\pi\,cos\,0}=\frac{1}{\pi}.$$

Luego $f$ tiene en 0 una singularidad evitable.

No tiene sentido estudiar la singularidad en $\infty$.

e)

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}.$$

Es claro que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0,1\})$. La función $f$ tiene una singularidad esencial en 0 ya que

$$\nexists \lim_{z\to 0} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}.$$

A saber,

$$\begin{cases} \text{si} & z_n & = & \frac{1}{n}, & \text{entonces} & f(z_n) & = & \frac{e^n}{\frac{1}{n}-1} & \to & -\infty \\ \text{si} & z_n & = & -\frac{1}{n}, & \text{entonces} & f(z_n) & = & \frac{e^{-n}}{-\frac{1}{n}-1} & \to & 0 \end{cases}$$

Puesto que

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

y

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \forall z \in D(0,1),$$

se tiene que

$$f(z) = \left(-\sum_{m=0}^{+\infty} z^m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m-n=k} \frac{1}{n!}\right) z^k =$$

(Como quiera que $0 \leq m, n$ y $m-n=k$ se sigue que $n \geq max\{0,-k\}$)

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\sum_{n=-k}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) z^k - \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) z^k = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\sum_{n=-k}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) z^k - e\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

y por tanto

$$Res(f,0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = -(e-1) = 1-e.$$

Para $z = 1$
$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} e^{\frac{1}{z}} = e.$$
Luego $f$ tiene en $z = 1$ un polo de orden 1 y
$$Res(f, 1) = e.$$

Estudiemos la singularidad en $\infty$. Como $f$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(0,1)$ consideremos la función $F : D(0,1)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ dada por
$$F(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{e^z}{\frac{1}{z}-1} = \frac{ze^z}{1-z}.$$
Como
$$\lim_{z\to 0} F(z) = \lim_{z\to 0}\frac{ze^z}{1-z} = 0,$$
se sigue que $F$ presenta una singularidad evitable en 0, y por tanto $f$ es regular en $\infty$. Sabemos, por (4.6), que
$$Res(f,\infty) = -Res(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}), 0).$$
Como
$$\lim_{z\to 0} z(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{1-z} = 1$$
se sigue que la función $\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ tiene un polo de orden 1 en 0 y que
$$Res(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}), 0) = 1$$
luego
$$Res(f,\infty) = -1$$
(Como tenía que ser a la vista del ejercicio 157).

■

**Ejercicio Propuesto 151.**
*Prueba que una función entera e inyectiva es una función polinómica de grado uno.*

**Solución.** (Ver Teorema 5.7, p. 249)
Si $f$ tuviera una singularidad esencial en $\infty$, entonces, por la Proposición 4.31,3), el conjunto

$$\{f(z) : |z| > 1\}$$

es denso en $\mathbb{C}$. Por otra parte, por el Teorema de la aplicación abierta, el conjunto

$$\{f(z) : |z| < 1\}$$

es abierto. Luego

$$\{f(z) : |z| > 1\} \cap \{f(z) : |z| > 1\} \neq \emptyset,$$

lo que contradice que $f$ es inyectiva. Por el Corolario 4.32, $f$ es una función polinómica. Pero como $f$ es inyectiva, debe ser necesariamente una función polinómica de grado uno.

■

**Ejercicio Propuesto 152.**
*Supongamos que $f$ y $g$ son holomorfas en un entorno de un punto $a$; que $f(a) \neq 0$ y que $g$ tiene un cero de orden 2 en $a$. Prueba que*

$$Res\left(\frac{f(z)}{g(z)}; a\right) = 2\,\frac{f'(a)}{g''(a)} - \frac{2}{3}\,\frac{f(a)g'''(a)}{(g''(a))^2}$$

**Solución.**

Empecemos viendo que $\frac{f}{g}$ tiene un polo de orden 2 en $a$. Com $g$ tiene un cero de orden 2 en $a$ se sigue que existe una función $\varphi$ holomorfa en un entorno de $a$ con $\varphi(a) \neq 0$ y tal que

$$g(z) = (z-a)^2\varphi(z). \tag{1}$$

Por consiguiente

$$\lim_{z\to a}(z-a)^2\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{f(a)}{\varphi(a)} \neq 0.$$

Ahora, por la fórmula de cálculo de residuos de polos, tenemos que

$$Res\left(\frac{f(z)}{g(z)}; a\right) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right] =$$

$$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)\varphi(z)-f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)^2}=\lim_{z\to a}\left(\frac{f'(z)}{\varphi(z)}-\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)^2}\right)=\frac{f'(a)}{\varphi(a)}-\frac{f(a)\varphi'(a)}{\varphi(a)^2}.$$

Ahora bien, derivando en (1) tenemos que

$$g'(z)=2(z-a)\varphi(z)+(z-a)^2\varphi'(z)$$

$$g''(z)=2\varphi(z)+4(z-a)\varphi'(z)+(z-a)^2\varphi''(z)\Rightarrow g''(a)=2\varphi(a)$$

$$g'''(z)=6\varphi'(z)+6(z-a)\varphi''(z)+(z-a)^2\varphi'''(z)\Rightarrow g'''(a)=6\varphi'(a)$$

Sustituyendo arriba obtenemos que

$$Res\left(\frac{f(z)}{g(z)};a\right)=\frac{f'(a)}{\frac{g''(a)}{2}}-\frac{f(a)\frac{g'''(a)}{6}}{(\frac{g''(a)}{2})^2}=2\frac{f'(a)}{g''(a)}-\frac{2}{3}\frac{f(a)g'''(a)}{(g'(a))^2}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 153.**
*Sea $\Omega$ un abierto en el plano, $a\in\Omega$ y $f$ una función holomorfa en $\Omega\backslash\{a\}$. ¿Qué relación existe entre las singularidades en $a$ de las funciones $f$ y $f'$?*

**Solución.**
Fijemos $R>0$ tal que $D(a,R)\subseteq\Omega$, y consideremos el desarrollo de Laurent de $f$ en el anillo $A(a;0,R)$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n,\quad \forall z\in A(a;0,R).$$

Sabemos que la serie se puede derivar término a término obteniéndose el desarrollo de Laurent de $f'$

$$f'(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nc_n(z-a)^{n-1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}(z-a)^n,\quad \forall z\in A(a;0,R).$$

Por tanto:
$f$ es regular en $a$ $\Leftrightarrow$ $c_n=0,\ \forall n<0$ $\Leftrightarrow$
$nc_n=0,\ \forall n<1$ $\Leftrightarrow$ $f'$ es regular en $a$.

$f$ tiene un polo en $a$ de orden $k$ $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{ccl} c_{-k} & \neq & 0 \\ c_n & = & 0,\quad \forall n<-k \end{array}\right\}$ $\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-k)c_{-k} & \neq & 0 \\ nc_n & = & 0, \quad \forall n < -k \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-(k+1)+1)c_{-(k+1)+1} & \neq & 0 \\ (n+1)c_{n+1} & = & 0, \quad \forall n < -(k+1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$f'$ tiene un polo en $a$ de orden $k+1$.

$f$ tiene una singularidad esencial en $a$ $\Leftrightarrow$
$\{n \in \mathbb{N} : c_{-n} \neq 0\}$ es infinito $\Leftrightarrow$
$\{n \in \mathbb{N} : (-n+1)c_{-n+1} \neq 0\}$ es infinito $\Leftrightarrow$
$f'$ tiene una singularidad esencial en $a$.

■

**Ejercicio Propuesto 154.**
*Sea $f$ una función holomorfa en un entorno reducido de un punto $a$ que no se anula en dicho entorno. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en $a$ de las funciones $f$ y $\frac{1}{f}$?*

**Solución.**
La siguiente tabla recoge la equivalencia entre el comportamiento en $a$ de $f$ y de $\frac{1}{f}$.

| | f | 1/f |
|---|---|---|
| (1) | $f$ regular en $a$ y $\lim_{z\to a} f(z) \neq 0$ | $\frac{1}{f}$ regular en $a$ y $\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} \neq 0$ |
| (2) | $f$ regular en $a$ y $\lim_{z\to a} f(z) = 0$ | $\frac{1}{f}$ tiene un polo en $a$ |
| (3) | $f$ tiene un polo en $a$ | $\frac{1}{f}$ regular en $a$ y $\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ |
| (4) | $f$ tiene una sing. esencial en $a$ | $\frac{1}{f}$ tiene una sing. esencial en $a$ |

En efecto:

(1) es consecuencia de la regla de derivación.

(2) y (3) se siguen de la Proposición 4.27 que caracteriza el hecho de que una función $f$ tenga un polo en $a$ por

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Además, como consecuencia del Teorema 4.26 que caracteriza el hecho de que una singularidad aislada sea un polo de orden $k$, y de la caracterización del orden de un cero (3.5), podemos completar (2) y (3) como sigue:

(2) $\widehat{f}$ tiene un cero de orden $k$ en $a$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{f}$ tiene un polo de orden $k$ en $a$.

(3) $f$ tiene un polo de orden $k$ en $a$ $\Leftrightarrow$ $(\dfrac{1}{f})^\wedge$ tiene un cero de orden $k$ en $a$.

(4) se sigue, o bien por exclusión, o bien como consecuencia del Teorema de Casorati-Weierstrass.

■

**Ejercicio Propuesto 155.**
*Sean $f$ y $g$ funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto $a$. Estúdiese el comportamiento en $a$ de las funciones $f+g$ y $fg$, supuesto conocido el de $f$ y $g$.*

**Solución.**
Fijemos $R > 0$ tal que $f, g \in \mathcal{H}(D(a,R)\backslash\{a\})$.

**1)** $f + g$

Consideremos los desarrollos en serie de Laurent de $f$ y $g$ en $D(a,R)\backslash\{a\}$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n.$$

Es claro que el desarrollo en serie de Laurent de $f+g$ en $D(a,R)\backslash\{a\}$ viene dado por

$$f(z)+g(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(c_n+d_n)(z-a)^n.$$

De aquí se sigue inmediatamente el comportamiento de $f+g$ que reflejamos en la siguiente tabla, donde la primera columna es relativa al comportamiento de $f$ en $a$, la primera fila es relativa al comportamiento de $g$ en $a$, y las demás entradas expresan el correspondiente comportamiento de $f+g$ en $a$. Por cuestiones de espacio, se ha escrito "$k$-polo" para designar "polo de orden $k$".

| | regular | $m$-polo | esencial |
|---|---|---|---|
| regular | regular | $m$-polo | esencial |
| $n$-polo | $n$-polo | $max\{n,m\}$-polo, si $n\neq m$<br><br>$k$-polo, si $n=m$, y $\exists k>0$:<br>$c_{-k}\neq d_{-k}$, y $c_{-p}=-d_{-p}$ $(k<p\leq n)$<br><br>regular, si $n=m$ y $c_{-p}=-d_{-p}$, $(1\leq p\leq n)$ | esencial |
| esencial | esencial | esencial | ? |

Nótese que si $f$ y $g$ tienen una singularidad esencial en $a$, entonces $f+g$ puede presentar en $a$ una singularidad de cualquier tipo, como muestran los siguientes ejemplos:

- Si $f(z)=e^{1/z}$ y $g(z)=-e^{1/z}$, entonces $f(z)+g(z)=0$ es regular en 0.

- Si $f(z)=e^{1/z}$ y $g(z)=\frac{1}{z^n}-e^{1/z}$, entonces $f(z)+g(z)=\frac{1}{z^n}$ tiene un polo de orden $n$ en 0.

- Si $f(z)=g(z)=e^{1/z}$, entonces $f(z)+g(z)=2e^z$ tiene una singularidad esencial en 0.

**2)** $fg$

Si $f\equiv 0$ o $g\equiv 0$, es claro que $fg\equiv 0$. Supongamos que tanto $f$ como $g$ no son idénticamente nulas.

Para estudiar el comportamiento del producto, además de los desarrollos en serie de Laurent de $f$ y $g$ en $D(a,R)\backslash\{a\}$, usaremos las diversas caracterizaciones de las singularidades.

**2.1)** $f$ y $g$ no tienen una singularidad esencial en $a$.

Para tratar conjuntamente a los ceros y a los polos diremos que una función $h \in \mathcal{H}(D(a,R)\backslash\{a\})$ tiene un cp (cero-polo) de orden $n \in \mathbb{Z}$ en $a$ si se verifica que

$$h(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad \forall z \in D(a,R)\backslash\{a\},$$

para conveniente $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,R))$ con $\varphi(a) \neq 0$.

El caso en el que $h$ es regular en $a$ y su extensión holomorfa $\widehat{h}$ tiene un cero en $a$ de orden $k \geq 0$ corresponde a la situación $n = k$. El caso en el que $h$ es regular en $a$ y $\widehat{h}(a) \neq 0$ corresponde al caso $n = 0$. El caso en que $h$ tiene un polo de orden $p > 0$ en $a$ corresponde a la situación $n = -p$.

Escribamos

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad \text{y} \quad g(z) = (z-a)^m \psi(z), \quad \forall z \in D(a,R)\backslash\{a\},$$

para convenientes $n, m \in \mathbb{Z}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(D(a,R))$ con $\varphi(a) \neq 0$ y $\psi(a) \neq 0$.

Es claro que

$$f(z)g(z) = (z-a)^{n+m} \varphi(z)\psi(z), \quad \forall z \in D(a,R)\backslash\{a\}.$$

De aquí se sigue el comportamiento de $fg$ en $a$:

- $fg$ es regular en $a$ y su extensión holomorfa tiene un cero en $a$ de orden $n+m$, en el caso en que $n+m \geq 0$.
- $fg$ tiene un polo en $a$ de orden $n+m$ si $n+m < 0$.

**2.2)** $f$ tiene una singularidad esencial en $a$.

Supongamos que $g$ no tiene una singularidad esencial en $a$. Veamos que $fg$ tiene una singularidad esencial en $a$. Consideremos en primer lugar dos casos particulares.

**Caso Particular 1:** $g$ es regular en $a$ y $\widehat{g}(a) \neq 0$.

Supuesto que existe el

$$\lim_{z \to a} f(z)g(z) = \alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$$

se tiene que

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{f(z)g(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\widehat{g}(a)} \in \widehat{\mathbb{C}},$$

en contra de que $f$ tiene una singularidad esencial en $a$. Luego, no existe en $\widehat{\mathbb{C}}$ el $\lim_{z\to a} f(z)g(z)$, y por tanto $fg$ tiene una singularidad esencial en $a$.
**Caso Particular 2:** $g(z) = (z-a)^m$ para $m \in \mathbb{Z}$.

Sea

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

el desarrollo en serie de Laurent de $f$ en $D(a,R)\backslash\{a\}$. Es claro que

$$f(z)g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+m}$$

es el desarrollo en serie de Laurent de $fg$ en $D(a,R)\backslash\{a\}$. Por tanto $fg$ tiene una singularidad esencial en $a$.
**Caso General:** Sabemos que

$$g(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad \forall z \in D(a,R)\backslash\{a\},$$

para convenientes $m \in \mathbb{Z}$ y $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,R))$ con $\varphi(a) \neq 0$. Teniendo en cuenta los dos casos particulares anteriores se sigue que

$$f(z)g(z) = f(z)(z-a)^m \varphi(z)$$

tiene una singularidad esencial en $a$.

Nótese que si $f$ y $g$ tienen una singularidad esencial en $a$, entonces $fg$ puede presentar en $a$ una singularidad de cualquier tipo, como muestran los siguientes ejemplos:

- Las funciones $f(z) = e^{1/z}$ y $g(z) = \frac{1}{e^{1/z}}$ tienen una singularidad esencial en 0, y $f(z)g(z) = 1$ es regular en 0.

- Dado un número natural $n$, las funciones $f(z) = e^{1/z}$ y $g(z) = \frac{1}{z^n e^{1/z}}$ tienen una singularidad esencial en 0, y $f(z)g(z) = \frac{1}{z^n}$ tiene un polo de orden $n$ en 0.

- Las funciones $f(z) = e^{2/z}$ y $g(z) = \frac{1}{e^{1/z}}$ tienen una singularidad esencial en 0, y $f(z)g(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en 0.

■

**Ejercicio Propuesto 156.**
*La función $f$ es holomorfa en un entorno del punto $a$ y la función $g$ tiene*

*un polo de orden $m$ en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en el punto $a$ la función compuesta $g \circ f$? ¿Qué ocurre si $g$ tiene una singularidad esencial en $a$?*

**Solución.**
Nótese que si $f$ es constantemente $f(a)$, entonces el ejercicio no tiene sentido. Supondremos por tanto que $f$ no es constantemente $f(a)$. Por el Principio de Identidad, podemos además suponer que $f(z) \neq f(a), \quad \forall z \in dom(f)$. Puesto que $g$ tiene un polo de orden $m$ en $f(a)$ sabemos que

$$\lim_{w \to f(a)} (w - f(a))^m g(w) = \alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\},$$

y por tanto, por continuidad de $f$ en $a$,

$$\lim_{z \to a} (f(z) - f(a))^m g(f(z)) = \alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Escribiendo

$$(z-a)^m g(f(z)) = \left( \frac{z-a}{f(z) - f(a)} \right)^m (f(z) - f(a))^m g(f(z))$$

caemos en la cuenta de que si $f'(a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m g(f(z)) = \frac{\alpha}{f'(a)^m} \in \mathbb{C} \backslash \{0\},$$

y por tanto $a$ es un polo de orden $m$ de $g \circ f$.

Supongamos ahora que $f'(a) = 0$. Sea $n$ el orden del cero en $a$ de la función $f(z) - f(a)$. Entonces,

$$f(z) - f(a) = (z-a)^n \varphi(z)$$

donde $\varphi$ es una función holomorfa con $\varphi(a) \neq 0$. Puesto que

$$(z-a)^{mn} g(f(z)) = \frac{(z-a)^{mn}}{(f(z) - f(a))^m} (f(z) - f(a))^m g(f(z)) =$$

$$\frac{1}{\varphi(z)^m} (f(z) - f(a))^m g(f(z))$$

converge a

$$\frac{\alpha}{\varphi(a)^m} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

cuando $z \to a$, se sigue que $a$ es un polo de orden $mn$ de $g \circ f$.

Supongamos ahora que $g$ tiene una singularidad esencial en $f(a)$. Fijemos $R > 0$ tal que $D(f(a), R)\backslash\{f(a)\} \subseteq dom(g)$. Por el Teorema de Casorati-Weierstrass, para todo $r$ con $0 < r < R$ se verifica que

$$\overline{\{g(w) \,:\, 0 <\mid w - f(a) \mid< r\}} = \mathbb{C}.$$

Para cada entorno abierto $U$ de $a$ contenido en $dom(f)$, por el teorema de la aplicación abierta, $f(U)$ es un entorno abierto de $f(a)$, luego existe $r$ con $0 < r < R$ tal que $D(f(a), r) \subseteq f(U)$. Por lo anterior,

$$\mathbb{C} = \overline{g(D(f(a), r))\backslash\{f(a)\}} \subseteq \overline{g(f(U))\backslash\{f(a)\}},$$

y por tanto $(g\circ f)(U\backslash\{a\})$ es denso en $\mathbb{C}$. Ahora, por el Teorema de Casorati-Weierstrass se sigue que $g \circ f$ tiene una singularidad esencial en $a$.

■

**Ejercicio Propuesto 157.**
*Justifica que la suma de los residuos de una función racional, incluyendo el residuo en $\infty$, es igual a 0.*

**Solución.**
Sea $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ una función racional, en la que podemos suponer que $P$ y $Q$ no tienen factores comunes. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ las raíces de $Q(z)$, y escribamos la descomposición en fracciones simples de $R$

$$R(z) = C(z) + \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{A_{k,1}}{z - a_k} + \frac{A_{k,2}}{(z - a_k)^2} + ... + \frac{A_{k,m_k}}{(z - a_k)^{m_k}} \right), \qquad (2)$$

donde $C(z)$ es el polinomio cociente de la división de $P(z)$ por $Q(z)$, y $m_k$ es el grado de la raíz $a_k$ de $Q(z)$. Sea

$$M = \max\{\mid a_k \mid :\ 1 \leq k \leq n\}$$

y fijemos $\rho > M$. Por definición

$$Res(R(z), \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} R(z)\, dz.$$

Teniendo en cuenta la descomposición (2) tenemos que

$$Res(R(z), \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} C(z)\, dz\ - \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} \frac{A_{k,1}}{z - a_k}\, dz + \right.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\frac{A_{k,2}}{(z-a_k)^2}\,dz+...+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\frac{A_{k,m_k}}{(z-a_k)^{m_k}}\,dz\Bigg).$$

Como $C(z)$ es una función entera, por el Teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)} C(z)\,dz=0.$$

Por la fórmula general de Cauchy para las derivadas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\frac{A_{k,1}}{z-a_k}\,dz=A_{k,1}$$

y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\frac{A_{k,2}}{(z-a_k)^2}\,dz=...=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\frac{A_{k,m_k}}{(z-a_k)^{m_k}}\,dz=0.$$

Luego

$$Res(R(z),\infty)=-\sum_{k=1}^{n}A_{k,1}.$$

Es claro de (2) que

$$A_{k,1}=Res(R(z),a_k)\quad(1\le k\le n).$$

Luego

$$Res(R(z),\infty)=-\sum_{k=1}^{n}Res(R(z),a_k).$$

Más generalmente, como consecuencia del Teorema de los Residuos podemos probar que:

*Si $f$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de singularidades $a_1,a_2,...,a_n$, entonces*

$$\sum_{k=1}^{n}Res(f(z),a_k)+Res(f(z),\infty)=0.$$

Sea

$$M=\max\{\mid a_k\mid:\ 1\le k\le n\}$$

y fijemos $\rho > M$. Por definición de residuo en el punto del infinito y por el teorema de los residuos tenemos que

$$Res(f(z),\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)} f(z)\,dz = -\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k).$$

■

**Ejercicio Propuesto 158.**
*Sea $\Omega$ un abierto, $a$ un punto de $\Omega$ y $f$ una función holomorfa en $\Omega\backslash\{a\}$ que tiene un polo de orden $n$ en $a$. Prueba que para $|w|$ suficientemente grande la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente $n$ soluciones.*

**Solución.**
Como $f$ tiene un polo de orden $n$ en $a$ se sigue que

$$\exists\varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \varphi(a) \neq 0 \ \text{ y } \ f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}, \quad \forall z \in \Omega\backslash\{a\}.$$

Como $\varphi(a) \neq 0$:

$$\exists r > 0 \ \text{ tal que } \left\{\begin{array}{lcl} D(a,r) & \subseteq & \Omega \\ \quad y & & \\ \varphi(z) & \neq & 0, \quad \forall z \in D(a,r) \end{array}\right.$$

(lo que conlleva que $f(z) \neq 0, \quad \forall z \in D(a,r)$.)

Consideremos la función

$$g : D(a,r) \to \mathbb{C}$$

definida por

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(z) & = & \frac{1}{f(z)} \quad \text{si} \quad z \neq a \\ g(a) & = & 0 \end{array}\right.$$

Por el Teorema de Riemann $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$, y es claro que

$$g(z) = (z-a)^n \frac{1}{\varphi(z)}, \quad \forall z \in D(a,r),$$

por lo que $g$ tiene un cero en $a$ de orden $n$. Por el Teorema 3.34 (Comportamiento local de una función holomorfa) $\exists\varepsilon > 0$ y $\exists U$ entorno de $a$

contenido en $D(a,r)$ tales que $\forall w \in D(0,\varepsilon)\backslash\{0\}$ existen exactamente $m$ puntos $z_k \in U \quad (1 \leq k \leq m)$ tales que

$$g(z_k) = w$$

Equivalentemente $\forall w : |w| > \frac{1}{\varepsilon}$ existen exactamente $m$ puntos $z_k \in U \quad (1 \leq k \leq m)$ tales que

$$\frac{1}{f(z_k)} = \frac{1}{w},$$

esto es:

$$f(z_k) = w.$$

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 159.**
*Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $D(a,R)\backslash\{a\}$ que converge uniformemente en compactos de $D(a,R)\backslash\{a\}$ a una función $f$. Justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

a) *Si las funciones $f_n$ tienen un polo en $a$ también $f$ tiene un polo en $a$.*

b) *Si las funciones $f_n$ tienen una singularidad esencial en $a$ también $f$ tiene una singularidad esencial en $a$.*

c) *Si las funciones $f_n$ son regulares en $a$ también $f$ es regular en $a$.*

**Solución.**

a) Falso. Por ejemplo, si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función

$$f_n : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$$

dada por

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}.$$

Es claro que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y que su función límite es

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$$

definida por

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ tiene un polo de orden $n$ en 0, y sin embargo $f$ tiene en 0 una singularidad esencial.

b) Falso. Consideremos para cada $n \subset \mathbb{N}$ la función

$$f_n : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$$

definida por

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\, e^{\frac{1}{z}}.$$

Es claro que $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Veamos que la convergencia es uniforme en compactos. Dado $K \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ compacto. Sea $M = max\{|e^{\frac{1}{z}}| : z \in K\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, fijemos $m \in \mathbb{N} : \frac{M}{m} < \varepsilon$. Entonces: $\forall n \geq m$ y $\forall z \in K$ se tiene que

$$|f_n(z)| = |\frac{1}{n} e^{\frac{1}{z}}| \leq \frac{M}{n} < \varepsilon.$$

Luego $\{f_n\} \to 0$ uniformemente en $K$. Por consiguiente $\{f_n\} \to 0$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Claramente, todas las $f_n$ tienen en 0 una singularidad esencial, y sin embargo la función límite es regular en 0.

c) Verdadero. Como $C(a, \frac{R}{2})$ es un compacto contenido en $D(a, R)\backslash\{a\}$: $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m$ se verifica que

$$|f_n(z) - f(z)| < 1, \quad \forall z \in C(a, \frac{R}{2}).$$

Por tanto, si llamamos

$$M = max\{|f(z)| : |z - a| = \frac{R}{2}\}$$

se tiene que para $n \geq m$ se verifica que

$$|f_n(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| < 1 + M, \quad \forall z \in C(a, \frac{R}{2}).$$

Como las $f_n$ son regulares en $a$, por el principio del módulo máximo aplicado a $\widehat{f_n}$ (la extensión holomorfa de $f_n$ en $a$) se tiene que para $n \geq m$ se verifica que

$$|f_n(z)| < 1 + M, \quad \forall z : 0 < |z - a| \leq \frac{R}{2} \tag{3}$$

Si $f$ no fuese regular en $a$, por el Teorema del Riemann (Teorema 2.22), $f$ no estaría acotada en $D(a, \frac{R}{2})\backslash\{a\}$. Luego, existiría $w \in D(a, \frac{R}{2})\backslash\{a\}$ tal que $|f(w)| > 1 + M$. Como $\{f_n(w)\} \to f(w)$, se obtiene una contradicción con (3). Luego $f$ es regular en $a$.

■

### 4.7.3. Ejercicios Propuestos (pp. 188-189)

**Ejerc. 160 - 177**

**Ejercicio Propuesto 160.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3cos^2x}\,dx$$

**Solución.**
En este caso el integrando de

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3cos^2x}\,dx$$

es la función racional

$$R(cos\,x, sen\,x) = \frac{1}{1+3cos^2x},$$

luego

$$f(z) = R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\,\frac{1}{iz} = \frac{1}{1+3(\frac{z^2+1}{2z})^2}\,\frac{1}{iz} =$$

$$\frac{1}{\frac{4z^2+3(z^4+2z^2+1)}{4z^2}}\,\frac{1}{iz} = \frac{1}{i}\,\frac{4z}{3z^4+10z^2+3}.$$

Vamos a estudiar los ceros de $Q(z) = 3z^4+10z^2+3$

$$z^2 = \frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6} = \frac{-10\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{-10\pm 8}{6} = \frac{-5\pm 4}{3} = \begin{cases} - & \frac{1}{3} \\ - & 3 \end{cases}$$

Luego

$$Q(z) = 3(z^2+\frac{1}{3})(z^2+3) = 3(z-\frac{i}{\sqrt{3}})(z+\frac{i}{\sqrt{3}})(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3}).$$

Por 4.7.1

$$I = 2\pi i\,[Res(f, \frac{i}{\sqrt{3}}) + Res(f, -\frac{i}{\sqrt{3}})].$$

$$Res(f, \frac{i}{\sqrt{3}}) = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{3}}} (z-\frac{i}{\sqrt{3}})f(z) = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{3}}} \frac{1}{i}\,\frac{(z-\frac{i}{\sqrt{3}})4z}{3(z-\frac{i}{\sqrt{3}})(z+\frac{i}{\sqrt{3}})(z^2+3)} =$$

$$\lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{3}}} \frac{1}{i}\,\frac{4z}{3(z+\frac{i}{\sqrt{3}})(z^2+3)} = \frac{1}{i}\,\frac{4\frac{i}{\sqrt{3}}}{3(2\frac{i}{\sqrt{3}})(-\frac{1}{3}+3)} = \frac{1}{i}\,\frac{2}{3(-\frac{1}{3}+3)} =$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{2}{-1+9}=\frac{1}{4i}.$$

Análogamente

$$Res(f,-\frac{i}{\sqrt{3}})=\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{3}}}(z+\frac{i}{\sqrt{3}})f(z)=\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{3}}}\frac{1}{i}\,\frac{(z+\frac{i}{\sqrt{3}})4z}{3(z-\frac{i}{\sqrt{3}})(z+\frac{i}{\sqrt{3}})(z^2+3)}=$$

$$\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{3}}}\frac{1}{i}\,\frac{4z}{3(z-\frac{i}{\sqrt{3}})(z^2+3)}=\frac{1}{i}\,\frac{-4\frac{i}{\sqrt{3}}}{3(-2\frac{i}{\sqrt{3}})(-\frac{1}{3}+3)}=$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{2}{3(-\frac{1}{3}+3)}=\frac{1}{i}\,\frac{2}{-1+9}=\frac{1}{4i}.$$

Por tanto

$$I=2\pi i\,[\frac{1}{4i}+\frac{1}{4i}]=2\pi i\,\frac{1}{2i}=\pi$$

■

**Ejercicio Propuesto 161.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos2\varphi}{5-4cos\varphi}\,d\varphi$$

**Solución.**
Para todo $\varphi\in\mathbb{R}$ sabemos que

$$cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{e^{2i\varphi}+1}{2e^{i\varphi}},$$

y por tanto

$$cos2\varphi=\frac{e^{4i\varphi}+1}{2e^{2i\varphi}}.$$

En consecuencia

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos2\varphi}{5-4cos\varphi}\,d\varphi=\int_{C(0,1)}\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5-4\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{1}{iz}\,dz.$$

Nótese que

$$f(z) = \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5-4\frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} = \frac{z^4+1}{10z^2-4z(z^2+1)} \frac{1}{iz} = \frac{z^4+1}{2z^2(5z-2z^2-2)} \frac{1}{i} =$$

$$\frac{1}{i} \frac{z^4+1}{-2z^2(2z^2-5z+2)}.$$

Vamos a estudiar los ceros de $Q(z) = 2z^2 - 5z + 2$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

Luego

$$Q(z) = 2(z - \frac{1}{2})(z-2)$$

y por tanto

$$f(z) = \frac{1}{i} \frac{z^4+1}{-4z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)}.$$

Luego los polos de $f$ son 0 (polo doble) y $\frac{1}{2}$ (polo simple) y 2 (polo simple). Nótese que ninguno de ellos es raíz del numerador. Por el Teorema de los residuos

$$I = 2\pi i\,[Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2})].$$

Vamos a calcular dichos residuos.

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{1}{i} \frac{z^4+1}{-4z^2+10z-4} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{i} \frac{4z^3(-4z^2+10z-4)-(-8z+10)(z^4+1)}{(-4z^2+10z-4)^2} = \frac{1}{i}\frac{-10}{16} = -\frac{5}{4i}.$$

Análogamente

$$Res(f,\frac{1}{2}) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (z-\frac{1}{2}) f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{i} \frac{z^4+1}{-4z^2(z-2)} = \frac{1}{i} \frac{\frac{1}{2^4}+1}{-4.\frac{1}{2^2}.(\frac{1}{2}-2)} =$$

$$\frac{1}{i} \frac{\frac{17}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{17}{24i}.$$

Por tanto

$$I = 2\pi i\,[-\frac{5}{4i} + \frac{17}{24i}] = -\frac{13\pi}{12}.$$

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 162.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos^2 3x}{5 - 3cos2x}\, dx$$

**Solución.**
Para todo $x \in \mathbb{R}$ sabemos que

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix} + 1}{2e^{ix}},$$

y por tanto

$$cos2x = \frac{e^{4ix} + 1}{2e^{2ix}} \quad \text{y} \quad cos^2 3x = \left[\frac{e^{6ix} + 1}{2e^{3ix}}\right]^2.$$

En consecuencia

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{cos^2 3x}{5 - 3cos2x}\, dx = \int_{C(0,1)} \frac{\left[\frac{z^6+1}{2z^3}\right]^2}{5 - 3\frac{z^4+1}{2z^2}} \frac{1}{iz}\, dz.$$

Nótese que

$$f(z) = \frac{\left[\frac{z^6+1}{2z^3}\right]^2}{5 - 3\frac{z^4+1}{2z^2}} \frac{1}{iz}$$

---

$$\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5 - 4\frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} = \frac{z^4 + 1}{10z^2 - 4z(z^2 + 1)} \frac{1}{iz} = \frac{z^4 + 1}{2z^2(5z - 2z^2 - 2)} \frac{1}{i} =$$

$$\frac{1}{i} \frac{z^4 + 1}{-2z^2(2z^2 - 5z + 2)}.$$

Vamos a estudiar los ceros de $Q(z) = 2z^2 - 5z + 2$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

Luego

$$Q(z) = 2(z - \frac{1}{2})(z - 2)$$

y por tanto

$$f(z) = \frac{1}{i}\,\frac{z^4 + 1}{-4z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)}.$$

Luego los polos de $f$ son 0 (polo doble) y $\frac{1}{2}$ (polo simple) y 2 (polo simple). Nótese que ninguno de ellos es raíz del numerador. Por el Teorema de los residuos

$$I = 2\pi i\,[Res(f, 0) + Res(f, \frac{1}{2})].$$

Vamos a calcular dichos residuos.

$$Res(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{1}{i}\,\frac{z^4 + 1}{-4z^2 + 10z - 4} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{i}\,\frac{4z^3(-4z^2 + 10z - 4) - (-8z + 10)(z^4 + 1)}{(-4z^2 + 10z - 4)^2} = \frac{1}{i}\,\frac{-10}{16} = -\frac{5}{4i}.$$

Análogamente

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2})f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{i}\,\frac{z^4 + 1}{-4z^2(z - 2)} = \frac{1}{i}\,\frac{\frac{1}{2^4} + 1}{-4.\frac{1}{2^2}.(\frac{1}{2} - 2)} =$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\frac{17}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{17}{24i}.$$

Por tanto

$$I = 2\pi i\,[-\frac{5}{4i} + \frac{17}{24i}] = -\frac{13\pi}{12}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 163.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5cos^2 t + 4}\,dt$$

**Solución.**
El integrando de
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5cos^2t + 4}\, dt$$
es la función racional
$$R(cos\, t, sen\, t) = \frac{1}{5cos^2t + 4}.$$
Consideremos la función compleja:
$$f(z) = R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\, \frac{1}{iz} = \frac{1}{5(\frac{z^2+1}{2z})^2 + 4}\, \frac{1}{iz} =$$
$$\frac{1}{i}\, \frac{1}{\frac{5(z^2+1)^2+16z^2}{4z^2}}\, \frac{1}{z} = \frac{1}{i}\, \frac{4z}{5(z^4+2z^2+1)+16z^2} = \frac{1}{i}\, \frac{4z}{5z^4+26z^2+5}.$$
Vamos a calcular los ceros del denominador
$$Q(z) = 5z^4 + 26z^2 + 5$$
$$z^2 = \frac{-26 \pm \sqrt{676-100}}{10} = \frac{-26 \pm \sqrt{576}}{10} = \frac{-26 \pm 24}{10} = \begin{cases} - & \frac{1}{5} \\ - & 5 \end{cases}$$
Luego
$$Q(z) = 5(z^2 + \frac{1}{5})(z^2+5) = 5(z + i\frac{1}{\sqrt{5}})(z - i\frac{1}{\sqrt{5}})(z + i\sqrt{5})(z - i\sqrt{5}).$$
Puesto que los únicos ceros de $Q$ dentro del disco unidad son
$$-i\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } i\frac{1}{\sqrt{5}},$$
se sigue de 4.7.1. que
$$I = 2\pi i[Res(f, -i\frac{1}{\sqrt{5}}) + Res(f, i\frac{1}{\sqrt{5}})].$$
Puesto que ambas raíces son ceros simples de $Q$, y por tanto polos simples de $f$ se tiene que
$$Res(f, -i\frac{1}{\sqrt{5}}) = \lim_{z \to -i\frac{1}{\sqrt{5}}} (z + i\frac{1}{\sqrt{5}}) f(z) = \lim_{z \to -i\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{1}{i}\, \frac{4z}{5(z - i\frac{1}{\sqrt{5}})(z^2+5)} =$$

$$\frac{1}{i}\frac{-i4\frac{1}{\sqrt{5}}}{5(-2i\frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{1}{5}+5)} = \frac{1}{i}\frac{2}{-1+25} = \frac{2}{24i} = \frac{1}{12i},$$

y

$$Res(f, i\frac{1}{\sqrt{5}}) = \lim_{z\to i\frac{1}{\sqrt{5}}}(z - i\frac{1}{\sqrt{5}})f(z) = \lim_{z\to i\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{1}{i}\frac{4z}{5(z+i\frac{1}{\sqrt{5}})(z^2+5)} =$$

$$\frac{1}{i}\frac{4i\frac{1}{\sqrt{5}}}{5(2i\frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{1}{5}+5)} = \frac{1}{i}\frac{2}{-1+25} = \frac{2}{24i} = \frac{1}{12i}.$$

En consecuencia,

$$I = 2\pi i[\frac{1}{12i} + \frac{1}{12i}] = \frac{4\pi i}{12i} = \frac{\pi}{3}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 164.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{15sen^2t+1}\,dt$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 165.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a\,sen\,x + b\cos x + c}\,dx \quad (a,b,c\in\mathbb{R} : a^2+b^2<c^2).$$

**Solución.**
Puesto que el integrado de

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{a\,sen\,x + b\cos x + c}\,dx$$

es la función racional

$$R(cos\,x, sen\,x) = \frac{1}{a\,sen\,x + b\,cos\,x + c},$$

consideraremos la función racional

$$f(z) = R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\,\frac{1}{iz} = \frac{1}{a\,\frac{z^2-1}{2iz} + b\,\frac{z^2+1}{2z} + c}\,\frac{1}{iz} =$$

$$\frac{2}{a(z^2-1) + ib(z^2+1) + 2icz} = \frac{2}{(a+ib)z^2 + 2icz + (-a+ib)}.$$

Los ceros del denominador

$$Q(z) = (a+ib)z^2 + 2icz + (-a+ib)$$

vienen dados por

$$z = \frac{-2ic \pm \sqrt{-4c^2 - 4(a+ib)(-a+ib)}}{2(a+ib)} = \frac{-2ic \pm \sqrt{-4c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a+ib)} =$$

$$\frac{-2ic \pm 2\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2(a+ib)} = \frac{-ic \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+ib} = \frac{-ic \pm i\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{a+ib}.$$

Por tanto, los ceros son:

$$z_1 = i\frac{-c + \sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a+ib} \quad \text{y} \quad z_2 = i\frac{-c - \sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a+ib},$$

y en consecuencia

$$Q(z) = (a+ib)(z-z_1)(z-z_2).$$

Notemos que $|z_1 z_2| = 1$
En efecto:

$$|z_1 z_2| = \frac{|(-c + \sqrt{c^2-a^2-b^2})(-c - \sqrt{c^2-a^2-b^2})|}{|a+ib|^2} =$$

$$\frac{|c^2 - (c^2-a^2-b^2)|}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Luego si uno de ellos es interior a la circunferencia unidad, el otro es exterior. Es claro que la condición del enunciado conlleva que $c \neq 0$.

Supongamos que $c > 0$. Notemos que en este caso

$$|z_1|^2 = \frac{(-c+\sqrt{c^2-a^2-b^2})^2}{a^2+b^2} = \frac{c^2+c^2-a^2-b^2-2c\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a^2+b^2} =$$

$$\frac{2c^2-a^2-b^2-2c\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a^2+b^2}.$$

Como $c > 0$ y es claro que $\sqrt{c^2-a^2-b^2} < c$ se tiene que

$$c^2-a^2-b^2 = (\sqrt{c^2-a^2-b^2})^2 < c\sqrt{c^2-a^2-b^2},$$

y por tanto

$$\mid z_1 \mid^2 < \frac{2c^2-a^2-b^2-2(c^2-a^2-b^2)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Luego, en este caso

$$|z_1| < 1 \ \text{ y } \ |z_2| > 1.$$

Por 4.7.1 se tiene que

$$I = 2\pi i\, Re(f, z_1) = 2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) =$$

$$2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2}{(a+ib)(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i\frac{2}{(a+ib)(z_1-z_2)} =$$

$$2\pi i\frac{2}{(a+ib)2i\frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a+ib}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}.$$

Si $c < 0$, entonces como

$$|z_1|^2 = \frac{2c^2-a^2-b^2-2c\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a^2+b^2},$$

y como claramente $(-c)^2 > c^2-a^2-b^2$ y por tanto $-c > \sqrt{c^2-a^2-b^2}$, y se tiene que

$$-c\sqrt{c^2-a^2-b^2} > (\sqrt{c^2-a^2-b^2})^2 = c^2-a^2-b^2,$$

se sigue que

$$\mid z_1 \mid^2 > \frac{2c^2-a^2-b^2+2(c^2-a^2-b^2)}{a^2+b^2} = \frac{4c^2-3a^2-3b^2}{a^2+b^2} > 1.$$

Por tanto, en este caso,

$$|z_1| > 1 \ \text{ y } \ |z_2| < 1.$$

Por 4.7.1 se tiene que

$$I = 2\pi i\, Res(f, z_2) = 2\pi i \lim_{z\to z_2} (z - z_2) f(z) =$$

$$2\pi i \lim_{z\to z_2} (z - z_2) \frac{2}{(a + ib)(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \frac{2}{(a + ib)(z_2 - z_1)} =$$

$$2\pi i \frac{2}{(a + ib) 2i \frac{-\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a+ib}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$$

Nota: Obsérvese que no habría hecho falta volver a hacer el desarrollo cuando $c < 0$, bastaría caer en la cuenta de que un cambio de signo en la integral repercute en cambiar los papeles de $a$ por $-a$, de $b$ por $-b$, y de $c$ por $-c > 0$, por lo que el resultado se sigue del caso ya estudiado.

■

**Ejercicio Propuesto 166.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3cos^2 t + 2sen^2 t}{9cos^2 t + 4sen^2 t}\, dt$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 167.**
*Usando el teorema de los residuos calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^{2\pi} cos^{2n} x\, dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 168.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\, sen\, x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad (0 < b < a)$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 169.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{\pi} \frac{sen^2 t}{a + b\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{b^2}\,(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \qquad (0 < b < a)$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 170.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - 2acos\vartheta + a^2} = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|} \qquad (a \in \mathbb{R},\ |a| \neq 1)$$

**Solución.**
Si $a = 0$, entonces es claro que

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - 2a\cos\vartheta + a^2} = \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi.$$

Supondremos por tanto que $a \neq 0$. Por 4-7.1 tenemos que

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - 2a\cos\vartheta + a^2} = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res(f, z_j),$$

donde $\{z_1, ..., z_q\}$ son los polos en el disco unidad de la función

$$f(z) = \frac{1}{1 - 2a\,\frac{z^2+1}{2z} + a^2}\,\frac{1}{iz} = \frac{1}{z - az^2 - a + a^2 z}\,\frac{1}{i} =$$

$$\frac{1}{-az^2 + (a^2+1)z - a}\,\frac{1}{i} = \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + a}.$$

Calculamos las raíces del denominador

$$z = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} =$$

$$\frac{a^2 + 1 \pm \mid a^2 - 1 \mid}{2a} = \begin{cases} a \\ \frac{1}{a} \end{cases}$$

Luego

$$f(z) = \frac{i}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}.$$

Si $\mid a \mid < 1$, entonces el único polo (simple) de $f$ en $D(0,1)$ es $a$, y

$$Res(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{i}{a(z - \frac{1}{a})} = \frac{i}{a(a - \frac{1}{a})} = \frac{i}{a^2 - 1},$$

y por tanto

$$I = 2\pi i\,\frac{i}{a^2-1} = -\frac{2\pi}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2} = \frac{2\pi}{\mid a^2 - 1 \mid}.$$

Si $\mid a \mid > 1$, entonces el único polo (simple) de $f$ en $D(0,1)$ es $\frac{1}{a}$, y

$$Res(f, \frac{1}{a}) = \lim_{z \to \frac{1}{a}} (z - \frac{1}{a}) f(z) = \lim_{z \to \frac{1}{a}} \frac{i}{a(z-a)} = \frac{i}{a(\frac{1}{a} - a)} = \frac{i}{1-a^2},$$

y por tanto

$$I = 2\pi i\,\frac{i}{1-a^2} = -\frac{2\pi}{1-a^2} = \frac{2\pi}{a^2-1} = \frac{2\pi}{\mid a^2 - 1 \mid}.$$

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 171.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(1 + a\,cos\,\vartheta)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|a| < 1).$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 172.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos^2\vartheta}{1 + a^2 - 2a\,cos\,(\vartheta - \varphi)}\,d\vartheta = \frac{1 + a^2\,cos\,2\varphi}{2(1-a^2)} \quad (a \in \mathbb{R}, |a| < 1).$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 173.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos(nt)}{1 + r^2 - 2r\,cos\,2t}\,dt = \frac{2\pi r^n}{1-r^2} \quad (|r| < 1).$$

**Solución.**
Notemos que si $z = e^{it}$, entonces

$$cos\,t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \;\text{ y }\; cos(nt) = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n}),$$

por lo que

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{cos(nt)}{1 + r^2 - 2r\,cos\,2t}\,dt = \int_{C(0,1)} f(z)\,dz,$$

donde

$$f(z)=\frac{\frac{1}{2}(z^n+\frac{1}{z^n})}{1+r^2-2r\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\,\frac{1}{iz}=\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{[1+r^2-r(z+\frac{1}{z})]z}=$$

$$\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{z+r^2z-rz^2-r}=\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{-rz^2+(1+r^2)z-r}=$$

$$-\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{rz^2-(1+r^2)z+r}.$$

Estudiemos los ceros de la ecuación

$$rz^2-(1+r^2)z+r=0$$

$$z=\frac{1+r^2\pm\sqrt{(1+r^2)^2-4r^2}}{2r}=\frac{1+r^2\pm\sqrt{1+2r^2+r^4-4r^2}}{2r}=$$

$$\frac{1+r^2\pm 2\sqrt{(1-r^2)^2}}{2r}=\frac{1+r^2\pm(1-r^2)}{2r}.$$

Por tanto, las raíces son:

$$z_1=\frac{1}{r}\ \text{ y }\ z_2=r,$$

y en consecuencia

$$f(z)=-\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{r(z-\frac{1}{r})(z-r)}.$$

Luego las singularidades de $f$ son $z=0$ (polo de orden $n$), $z=\frac{1}{r}$ (polo simple), y $z=r$ (polo simple). Por el Teorema de los residuos se tiene que

$$I=2\pi i\,[Res(f,0)+Res(f,r)].$$

Vamos a calcular el residuo de $f$ en 0 calculando el desarrollo en serie de Laurent de $f$ en el anillo $A(0;0,r)$. Descomponiendo en fracciones simples

$$\frac{1}{r(z-\frac{1}{r})(z-r)}=\frac{1}{1-r^2}\left(\frac{1}{z-\frac{1}{r}}-\frac{1}{z-r}\right)=$$

$$\frac{1}{1-r^2}\left(-r\frac{1}{1-rz}+\frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{z}{r}}\right)=\frac{1}{1-r^2}\left(-r\sum_{k=0}^{+\infty}r^kz^k+\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{r^k}\right)=$$

$$\frac{1}{1-r^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-r^{k+1}+\frac{1}{r^{k+1}}\right)z^k.$$

Luego

$$f(z)=-\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{1-r^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-r^{k+1}+\frac{1}{r^{k+1}}\right)z^k=$$

$$-\frac{1}{2i(1-r^2)}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-r^{k+1}+\frac{1}{r^{k+1}}\right)z^{k+n}-$$

$$\frac{1}{2i(1-r^2)}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-r^{k+1}+\frac{1}{r^{k+1}}\right)z^{k-n}.$$

Luego el residuo de $f$ en 0 es el coeficiente para $k=n-1$ en la segunda serie y por tanto

$$Res(f,0)=-\frac{1}{2i(1-r^2)}\left(-r^n+\frac{1}{r^n}\right).$$

Vamos a calcular el residuo de $f$ en $r$

$$Res(f,r)=\lim_{z\to r}(z-r)f(z)=\lim_{z\to r}-\frac{1}{2i}(z^n+\frac{1}{z^n})\frac{1}{r(z-\frac{1}{r})}=$$

$$-\frac{1}{2i}\,(r^n+\frac{1}{r^n})\,\frac{1}{r(r-\frac{1}{r})}=-\frac{1}{2i}\,(r^n+\frac{1}{r^n})\,\frac{1}{r^2-1}=\frac{1}{2i}\,(r^n+\frac{1}{r^n})\,\frac{1}{1-r^2}.$$

Por tanto

$$I=2\pi i\left[-\frac{1}{2i(1-r^2)}\,(-r^n+\frac{1}{r^n})+\frac{1}{2i}\,(r^n+\frac{1}{r^n})\,\frac{1}{1-r^2}\right]=$$

$$\frac{\pi}{1-r^2}\,(r^n-\frac{1}{r^n}+r^n+\frac{1}{r^n})=\frac{2\pi r^n}{1-r^2}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 174.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi}\frac{cos^2 3t}{1+a^2-2a\,cos\,2t}\,dt=\pi\frac{a^2-a+1}{1-a}\qquad(0<a<1).$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 175.**

*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos(nx)}{5+3\,cos\,x}\,dx = (-1)^n \frac{\pi}{2.3^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

**Solución.**

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{cos(nx)}{5+3\,cos\,x}\,dx = Re\left[\int_0^{2\pi} \frac{cos(nx)}{5+3\,cos\,x}\,dx + i\int_0^{2\pi} \frac{sen(nx)}{5+3\,cos\,x}\,dx\right] =$$

$$Re\int_0^{2\pi} \frac{cos(nx)+isen(nx)}{5+3\,cos\,x}\,dx = Re\int_0^{2\pi} \frac{(cosx+isenx)^n}{5+3\,cos\,x}\,dx =$$

$$Re\int_{C(0,1)} \frac{z^n}{5+3\,\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{1}{iz}\,dz = Re\,\frac{2}{i}\int_{C(0,1)} \frac{z^n}{3z^2+10z+3}\,dz.$$

Puesto que las raíces del polinomio $3z^2+10z+3$ son

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{-10\pm 8}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$$

se tiene que

$$3z^2+10z+3 = 3(z+\frac{1}{3})(z+3).$$

Por el Teorema de los residuos

$$I = Re\left[\frac{2}{i}\,2\pi i\,Res(\frac{z^n}{3z^2+10z+3}, -\frac{1}{3})\right] =$$

$$Re\left[4\pi\,Res(\frac{z^n}{3(z+\frac{1}{3})(z+3)}, -\frac{1}{3})\right] =$$

$$Re\left[4\pi \lim_{z\to -\frac{1}{3}} (z+\frac{1}{3})\frac{z^n}{3(z+\frac{1}{3})(z+3)}\right] =$$

$$Re\left[4\pi \lim_{z\to -\frac{1}{3}} \frac{z^n}{3(z+3)}\right] = 4\pi\,\frac{(\frac{-1}{3})^n}{3(-\frac{1}{3}+3)} = 4\pi\,\frac{\frac{(-1)^n}{3^n}}{3\frac{8}{3}} = \frac{\pi(-1)^n}{2.3^n}.$$

∎

**Ejercicio Propuesto 176.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\,cos\,t)^n cos\,nt}{3+2\,cos\,t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\,(3-\sqrt{5})^n \quad (n\in\mathbb{N}).$$

**Solución.**
Puesto que

$$cos(nt) + i\,sen(nt) = e^{int} = (e^{it})^n = (cos\,t + i\,sen\,t)^n$$

se tiene que

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1+2\,cos\,t)^n cos\,nt}{3+2\,cos\,t}\,dt =$$

$$Re\left[\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\,cos\,t)^n cos\,nt}{3+2\,cos\,t}\,dt + i\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\,cos\,t)^n sen\,nt}{3+2\,cos\,t}\,dt\right] =$$

$$Re\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\,cos\,t)^n (cos\,nt + i\,sen\,nt)}{3+2\,cos\,t}\,dt =$$

$$Re\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\,cos\,t)^n (cos\,t + i\,sen\,t)^n}{3+2\,cos\,t}\,dt =$$

$$Re\int_{C(0,1)} \frac{(1+2\frac{z^2+1}{2z})^n z^n}{3+2\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{1}{iz}\,dz = Re\,\frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{(z^2+z+1)^n}{z^2+3z+1}\,dz.$$

Puesto que las raíces del polinomio $z^2+3z+1$ son

$$z = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

se tiene que

$$z^2+3z+1 = (z-z_1)(z-z_2),$$

donde

$$z_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \;\text{ y }\; z_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Nótese que $z_1$ pertenece al disco unidad, mientras que $z_2 < -1$, y por tanto no está en el disco unidad. Por el Teorema de los residuos

$$I = Re\left[\frac{1}{i}\,2\pi i\,Res(\frac{(z^2+z+1)^n}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1)\right] =$$

$$Re\left[2\pi\,\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{(z^2+z+1)^n}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] =$$

$$Re\left[2\pi\,\frac{(z_1^2+z_1+1)^n}{z_1-z_2}\right] =$$

$$2\pi\,\frac{(3-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 177.**
*Usando el teorema de los residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{2\pi} cos\,(nt - sen\,t)e^{(cos\,t)}\,dt = \frac{2\pi}{n!}.$$

**Solución.**

■

### 4.7.5. Ejercicios Propuestos (p. 211)

**Ejerc. 178 - 188**

**Ejercicio Propuesto 178.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 179.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ \ b^2<4ac)$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 180.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}\,dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 181.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 182.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\, dx$$

**Solución.**
Llamemos

$$P(x) = x^2 \quad \text{ y } \quad Q(x) = (x^2+1)(x^2+2x+2).$$

Calculemos los ceros de $Q$.

$$x^2+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x \pm i$$

$$x^2+2x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$$

Luego

$$Q(x) = (x-i)(x+i)(x-(-1+i))(x+1+i).$$

Es claro que

1) $P$ y $Q$ no tienen factores comunes,

2) $gr(Q) = 4 \geq gr(P)+2$,

3) $Q(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Por 4.7.4 tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \left[ Res(\frac{P(z)}{Q(z)}, i) + Res(\frac{P(z)}{Q(z)}, -1+i) \right].$$

Claramente $i$ y $-1+i$ son polos simples de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ y

$$Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, i\right) = \lim_{z \to i} (z-i)\, \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \to i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2+2z+2)} =$$

$$\frac{-1}{2i(-1+2i+2)} = \frac{-1}{2i(1+2i)} = \frac{-1}{-4+2i} = \frac{4+2i}{20} = \frac{2+i}{10},$$

y

$$Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, -1+i\right) = \lim_{z\to -1+i}(z-(-1+i))\frac{P(z)}{Q(z)} =$$

$$\lim_{z\to -1+i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+1+i)} = \frac{-2i}{(1-2i)2i} = \frac{-1}{1-2i} = \frac{-(1+2i)}{5} = -\frac{2+4i}{10}.$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx = 2\pi i\left[\frac{2+i}{10} - \frac{2+4i}{10}\right] =$$

$$2\pi i\left[-\frac{3}{10}\,i\right] = \frac{3}{5}\,\pi.$$

■

**Ejercicio Propuesto 183.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx \quad (a>0)$$

**Solución.**

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\frac{1}{4}x)\frac{-4x}{(x^2+a^2)^3}\,dx.$$

Integrando por partes podemos simplificar el integrando. En efecto, llamando

$$u = -\frac{1}{4}x \quad \text{y} \quad dv = \frac{-4x}{(x^2+a^2)^3}\,dx,$$

se tiene que

$$du = -\frac{1}{4}\,dx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}.$$

Por tanto,

$$I = \left.\frac{-\frac{1}{4}x}{(x^2+a^2)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{(x^2+a^2)^2}\,dx =$$

$$0 + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-ai)^2(x+ai)^2} =$$

(por 4.7.4)

$$\frac{1}{4}\, 2\pi i\, Res(\frac{1}{(z^2+a^2)^2}, ai) = \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ai)^2}{(z^2+a^2)^2}\right] =$$

$$\frac{\pi i}{2} \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+ai)^2}\right] = \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to ai} \frac{-2}{(z+ai)^3} =$$

$$\frac{\pi i}{2}\, \frac{-2}{(2ai)^3} = -\frac{\pi i}{8a^3(-i)} = \frac{\pi}{8a^3}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 184.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx$$

**Solución.**
Como el integrando es una función par se tiene que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx =$$

(por 4.7.4)

$$\frac{1}{2}\, 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res(\frac{1}{z^6+1}, z_j),$$

donde $z_1, ..., z_q$ son los ceros de $z^6+1$ en el semiplano superior. Los ceros de $z^6+1$ son las seis raíces sextas de $-1$, esto es

$$z_k = \mid -1 \mid^{1/6} (cos\, \frac{arg(-1)+2k\pi}{6} + i\, sen\, \frac{arg(-1)+2k\pi}{6}) =$$

$$cos\, \frac{\pi+2k\pi}{6} + i\, sen\, \frac{\pi+2k\pi}{6} = e^{i\, \frac{\pi+2k\pi}{6}} \qquad (k \in \{0, 1, ..., 5\}).$$

Luego

$$z_0 = e^{i\,\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}, \qquad z_1 = e^{i\,\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad z_2 = e^{i\,\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2},$$
$$z_3 = e^{i\,\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}, \quad z_4 = e^{i\,\frac{9\pi}{6}} = e^{i\,\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad z_5 = e^{i\,\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}.$$

En consecuencia,

$$I = \pi i \left[ Res(\frac{1}{z^6+1}, z_0) + Res(\frac{1}{z^6+1}, z_1) + Res(\frac{1}{z^6+1}, z_2) \right].$$

Puesto que cada $z_j$ es un polo simple de $\frac{1}{z^6+1}$ se sigue que

$$Res(\frac{1}{z^6+1}, z_j), z_j) = \lim_{z\to z_j} \frac{z-z_j}{z^6+1} =$$

(por L'Hôpital)

$$\lim_{z\to z_j} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6z_j^5} = \frac{z_j}{6z_j^6} = -\frac{z_j}{6}.$$

Por tanto

$$I = -\frac{\pi i}{6}[z_0+z_1+z_2] = -\frac{\pi i}{6}\left[ (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}) + i + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}) \right] = -\frac{\pi i}{6}\,2i = \frac{\pi}{3}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 185.**
*Usa el método de los residuos para probar la igualdad siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-c)^2+b^2}\,dx = \pi(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\frac{1}{(a+b)^2+c^2} \quad (a>0, b>0, c\neq 0)$$

**Solución.**
Llamemos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-c)^2+b^2}\,dx$$

y calculemos las raíces del denominador del integrando

$$x^2+a^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -a^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm ai$$

y

$$(x-c)^2+b^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-c)^2=-b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x-c=\pm bi \quad \Leftrightarrow \quad x=c\pm bi.$$

Luego las raíces del denominador en el semiplano superior son

$$ai \;\text{ y }\; c+bi$$

Por 4.7.4, la integral del enunciado vale

$$I=2\pi i[Res(f,ai)+Res(f,c+bi)]$$

donde

$$f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}\,\frac{1}{(z-c)^2+b^2}.$$

Notemos que

$$\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{1}{z+ai}\,\frac{1}{(z-c)^2+b^2}=\frac{1}{2ai}\,\frac{1}{(ai-c)^2+b^2},$$

por lo que $ai$ es un polo simple de $f$ y

$$Res(f,ai)=\frac{1}{2ai}\,\frac{1}{(ai-c)^2+b^2}.$$

Análogamente,

$$\lim_{z\to c+bi}(z-(c+bi))f(z)=\lim_{z\to c+bi}\frac{1}{z^2+a^2}\,\frac{1}{z-(c-bi)}=$$

$$\frac{1}{(c+bi)^2+a^2}\,\frac{1}{(c+bi)-(c-bi)}=\frac{1}{(c+bi)^2+a^2}\,\frac{1}{2bi},$$

por lo que $c+bi$ es un polo simple de $f$ y

$$Res(f,c+bi)=\frac{1}{(c+bi)^2+a^2}\,\frac{1}{2bi}.$$

En consecuencia,

$$I=2\pi i\left[\frac{1}{2ai}\,\frac{1}{(ai-c)^2+b^2}+\frac{1}{(c+bi)^2+a^2}\,\frac{1}{2bi}\right]=$$

$$\pi\left[\frac{1}{a}\,\frac{1}{(ai-c)^2+b^2}+\frac{1}{(c+bi)^2+a^2}\,\frac{1}{b}\right]=$$

$$\pi \left[\frac{1}{a}\,\frac{1}{-a^2+b^2+c^2-2aci}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2+2bci}\,\frac{1}{b}\right]=$$

$$\pi \left[\frac{1}{a}\,\frac{-a^2+b^2+c^2+2aci}{(-a^2+b^2+c^2)^2+4a^2c^2}+\frac{a^2-b^2+c^2-2bci}{(a^2-b^2+c^2)^2+4b^2c^2}\,\frac{1}{b}\right].$$

Llamemos

$$\Delta = a^2+b^2+c^2,$$

por lo que

$$\Delta^2=(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2,$$

y notemos que ambos denominadores coinciden y se escriben en función de $\Delta$. En efecto,

$$(-a^2+b^2+c^2)^2+4a^2c^2=a^4+b^4+c^4+2a^2c^2-2a^2b^2+2b^2c^2=\Delta^2-4a^2b^2,$$

y también

$$(a^2-b^2+c^2)^2+4b^2c^2=\Delta^2-4a^2b^2.$$

Luego

$$I=\pi \left[\frac{1}{a}\,\frac{-a^2+b^2+c^2+2aci}{\Delta^2-4a^2b^2}+\frac{a^2-b^2+c^2-2bci}{\Delta^2-4a^2b^2}\,\frac{1}{b}\right]=$$

$$\pi \left[\frac{1}{a}\,\frac{\Delta-2a^2}{\Delta^2-4a^2b^2}+\frac{\Delta-2b^2}{\Delta^2-4a^2b^2}\,\frac{1}{b}\right]=\pi\,\frac{b\Delta-2a^2b+a\Delta-2ab^2}{ab(\Delta^2-4a^2b^2)}=$$

$$\pi\,\frac{(a+b)\Delta-2ab(a+b)}{ab(\Delta^2-4a^2b^2)}=\pi\,\frac{(a+b)(\Delta-2ab)}{ab(\Delta-2ab)(\Delta+2ab)}=$$

$$\pi\,\frac{a+b}{ab}\,\frac{1}{\Delta+2ab}=\pi\,\frac{a+b}{ab}\,\frac{1}{(a+b)^2+c^2}=\pi\,(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\frac{1}{(a+b)^2+c^2}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 186.**
*Usa el método de los residuos para probar la igualdad siguiente:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\pi\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}\,(n-1)!}\qquad (a>0, n\geq 2)$$

**Solución.**
Puesto que la función del integrando es par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx.$$

Por 4.7.4, teniendo en cuenta que $x^2 + a^2 = (x - ai)(x + ai)$, se tiene que

$$I = \frac{1}{2}\, 2\pi i\, Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^n}, ai\right) = \pi i\, Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^n}, ai\right).$$

Como $ai$ es un polo de orden $n$ de la función

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^n},$$

sabemos que

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^n}, ai\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to ai} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-ai)^n \frac{1}{(z^2+a^2)^n}\right] =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to ai} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+ai)^n}\right].$$

Notemos en este momento que dados $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, la derivada $k$-ésima de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^n}$$

viene dada por

$$f^{k)}(z) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z-\alpha)^{n+k}}$$

como se puede ver fácilmente por inducción. En consecuencia,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+ai)^n}\right] = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z+ai)^{2n-1}}.$$

Luego

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^n}, ai\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to ai} \left[(-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z+ai)^{2n-1}}\right] =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(2ai)^{2n-1}}.$$

Puesto que $i^{2n-1} = i^{2n-2}i = (i^2)^{n-1}i = (-1)^{n-1}i$ se sigue que

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^n}, ai\right) = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1} a^{2n-1} i}.$$

Ahora,teniendo en cuenta que

$$(2n-2)! =$$

$$[\text{Producto de los pares} \leq 2n-2][\text{Producto de los impares} \leq 2n-3] =$$

$$2^{n-1}(n-1)!\,[\text{Producto de los impares} \leq 2n-3]$$

se sigue que

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^n}, ai\right) = \frac{1.3.5.\cdots.(2n-3)}{(n-1)!\,2^n\,a^{2n-1}\,i},$$

y en consecuencia

$$I = \pi\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{(n-1)!\,2^n\,a^{2n-1}}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 187.**
*Usa el método de los residuos para probar la igualdad siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2} \quad (a>0, b>0)$$

**Solución.**
Llamemos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2},$$

y notemos que

$$z^2+a^2 = (z-ai)(z+ai) \;\text{ y }\; z^2+b^2 = (z-bi)(z+bi).$$

Supongamos en primer lugar que $a=b$. Por 4.7.4.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} =$$

$$2\pi i\, Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^3}, ia\right).$$

Puesto que $ia$ es un polo de orden 3 de la función $\frac{1}{(z^2+a^2)^3}$ se tiene que

$$I = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to ia} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-ia)^3 \frac{1}{(z^2+a^2)^3}\right] = \pi i \lim_{z\to ia} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+ia)^3}\right] =$$

$$\pi i \lim_{z\to ia} \frac{12}{(z+ia)^5} = \pi i \frac{12}{(2ia)^5} = \frac{3\pi}{8a^5} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}.$$

Supongamos ahora que $a \neq b$. Por 4.7.4.

$$I = 2\pi i\left[Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}, ia\right) + Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}, ib\right)\right].$$

Puesto que la función $\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$ tiene un polo simple en $ia$ y un polo doble en $ib$ se tiene que

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}, ia\right) = \lim_{z\to ia} \frac{z-ia}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} =$$

$$\lim_{z\to ia} \frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{2ia(a^2-b^2)^2},$$

y

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}, ib\right) = \lim_{z\to ib} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ib)^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}\right] =$$

$$\lim_{z\to ib} \frac{-4z^2-2ibz-2a^2}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^3} = \frac{6b^2-2a^2}{8(a^2-b^2)^2b^3(-i)}.$$

Luego

$$I = 2\pi i\left[\frac{1}{2ia(a^2-b^2)^2} + \frac{6b^2-2a^2}{8(a^2-b^2)^2b^3(-i)}\right] =$$

$$\pi\left[\frac{1}{a(a^2-b^2)^2} - \frac{3b^2-a^2}{2b^3(a^2-b^2)^2}\right] = \pi\,\frac{2b^3-(3b^2-a^2)a}{2ab^3(a^2-b^2)^2} =$$

$$\frac{\pi(a+2b)(a-b)^2}{2ab^3(a^2-b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 188.**
*Usa el método de los residuos para probar la igualdad siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a} \qquad (a>0)$$

**Solución.**
Se empieza simplificando la integral mediante una integración por partes. Ya que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{4}x^3 \frac{-4x^3}{(x^4+a^4)^2}\,dx,$$

llamando

$$u = -\frac{1}{4}x^3 \quad \text{y} \quad dv = \frac{-4x^3}{(x^4+a^4)^2}\,dx$$

se tiene que

$$du = -\frac{3}{4}x^2\,dx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{x^4+a^4},$$

y por tanto

$$I = \left.\frac{-\frac{1}{4}x^3}{x^4+a^4}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\frac{3}{4}x^2}{x^4+a^4}\,dx =$$

$$0 + \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx.$$

Nótese que los ceros de $z^4+a^4$ son

$$\pm\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \text{y} \quad \pm\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i),$$

ya que

$$z^4+a^4 = (z^2+ia^2)(z^2-ia^2) =$$

$$(z-\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i))(z+\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i))(z-\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)).$$

Estamos en condiciones de aplicar 4.7.4, y por tanto

$$I = \frac{3}{4}2\pi i\left[Res(\frac{z^2}{z^4+a^4},\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)) + Res(\frac{z^2}{z^4+a^4},\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i))\right].$$

Puesto que

$$Res(\frac{z^2}{z^4+a^4}, \frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)) = \lim_{z\to\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)} (z - \frac{a}{\sqrt{2}}(1+i))\,\frac{z^2}{z^4+a^4} =$$

$$\lim_{z\to\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)} \frac{z^2}{(z^2+ia^2)(z+\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i))} =$$

$$\frac{ia^2}{2ia^2 2\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)} = \frac{\sqrt{2}}{4a(1+i)},$$

y

$$Res(\frac{z^2}{z^4+a^4}, \frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)) = \lim_{z\to\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)} (z - \frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i))\,\frac{z^2}{z^4+a^4} =$$

$$\lim_{z\to\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)} \frac{z^2}{(z+\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i))(z^2-ia^2)} =$$

$$\frac{-ia^2}{2\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)(-2ia^2)} = \frac{\sqrt{2}}{4a(-1+i)},$$

se sigue que

$$I = \frac{3\pi i}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{4a(1+i)} + \frac{\sqrt{2}}{4a(-1+i)}\right] = \frac{3\pi i}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{4a}\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i}\right] =$$

$$\frac{3\sqrt{2}\pi i}{8a}\,(-i) = \frac{3\sqrt{2}\pi}{8a}.$$

$\blacksquare$

### 4.7.7. Ejercicios Propuestos (p. 215)

**Ejerc. 189 - 196**

**Ejercicio Propuesto 189.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\, sen\, 3x}{x^2+9}\, dx$$

**Solución.**
Como el integrando es una función par tenemos que

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, sen\, 3x}{x^2+9}\, dx.$$

Puesto que por 4.7.6 tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, z_j\right),$$

donde $\{z_1, ..., z_q\}$ es el conjunto de los ceros de $Q$ en el semiplano superior, y puesto que los ceros de $z^2+9$ son $z = \pm 3i$, se sigue que

$$I = \frac{1}{2}\, Im\, \left[2\pi i\, Res\left(\frac{ze^{3iz}}{z^2+9}, 3i\right)\right].$$

Puesto que $3i$ es un polo simple de la función

$$\frac{ze^{3iz}}{z^2+9},$$

se sigue que

$$Res\left(\frac{ze^{3iz}}{z^2+9}, 3i\right) = \lim_{z\to 3i} (z-3i)\, \frac{ze^{3iz}}{z^2+9} =$$

$$\lim_{z\to 3i} \frac{ze^{3iz}}{z+3i} = \frac{3ie^{-9}}{6i} = \frac{e^{-9}}{2}.$$

Por tanto

$$I = \frac{1}{2}\, Im(2\pi i\, \frac{e^{-9}}{2}) = \frac{1}{2}\, \pi e^{-9}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 190.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\, 2x}{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

**Solución.**
¡Ojo que la función no es par! ¿es una errata?
Vamos a calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\, 2x}{x^2 - 2x + 2}\, dx = Re \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 2x + 2}\, dx \right].$$

Llamemos

$$P(z) = 1, \quad Q(z) = z^2 - 2z + 2$$

y notemos que

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i,$$

por lo que

$$Q(z) = (z - (1+i))(z - (1-i)).$$

Puesto que en nuestro caso
$\lambda = 2 > 0$,
$P$ y $Q$ no tienen factores comunes,
$gr(Q) = 2 > gr(P) + 1$
$Q(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
se sigue de 4.7.6 que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 2x + 2}\, dx = 2\pi i\, Res \left( \frac{e^{i2z}}{z^2 - 2z + 2}, 1 + i \right).$$

Puesto que

$$Res \left( \frac{e^{i2z}}{z^2 - 2z + 2}, 1 + i \right) = \lim_{z \to 1+i} (z - (1+i)) \frac{e^{i2z}}{(z - (1+i))(z - (1-i))} =$$

$$\lim_{z \to 1+i} \frac{e^{i2z}}{z - (1-i)} = \frac{e^{i2(1+i)}}{(1+i) - (1-i)} = \frac{e^{-2+2i}}{2i} = \frac{e^{-2}(cos\, 2 + isen\, 2)}{2i},$$

se sigue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e^2}\,(cos\,2 + isen\,2),$$

y por tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\,2x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e^2}\,cos\,2.$$

■

**Ejercicio Propuesto 191.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{cos\,4x}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

**Solución.**
Como la función del integrando es par se tiene que

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{cos\,4x}{x^4+5x^2+4}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\,4x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\,Re\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i4x}}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

Estamos en condiciones de aplicar 4.7.6 ya que

$$z^4+5z^2+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ -4 \end{array} \right.$$

y por tanto

$$Q(z) = z^4+5z^2+4 = (z^2+1)(z^2+4) = (z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i).$$

Luego

$$I = \frac{1}{2}\,Re\left[2\pi i\left(Res(\frac{e^{i4z}}{z^4+5z^2+4}, i) + Res(\frac{e^{i4z}}{z^4+5z^2+4}, 2i)\right)\right].$$

Calculemos estos residuos

$$Res(\frac{e^{i4z}}{z^4+5z^2+4}, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{i4z}}{(z-i)(z+i)(z^2+4)} =$$

$$\lim_{z\to i}\frac{e^{i4z}}{(z+i)(z^2+4)}=\frac{e^{-4}}{2i(-1+4)}=\frac{e^{-4}}{6i}$$

y

$$Res(\frac{e^{i4z}}{z^4+5z^2+4},2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{i4z}}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)}=$$

$$\lim_{z\to 2i}\frac{e^{i4z}}{(z^2+1)(z+2i)}=\frac{e^{-8}}{(-4+1)4i}=\frac{e^{-8}}{-12i}.$$

Luego

$$I=\frac{1}{2}\,Re\left[2\pi i\left(\frac{1}{e^4 6i}-\frac{1}{e^8 12i}\right)\right]=\frac{\pi}{2}\,(\frac{1}{3e^4}-\frac{1}{6e^8}).$$

■

**Ejercicio Propuesto 192.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,sen\,x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 193.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,sen\,x}{x^4+1}\,dx$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 194.**
*Calcula por el método de residuos la siguiente integral:*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{cos\,x}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 195.**
*Utilizando el método de residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\,tx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)e^{-at} \quad (a>0, t>0)$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 196.**
*Utilizando el método de residuos prueba la siguiente igualdad:*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{cos\,x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{b^2-a^2}(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}) \quad (a \neq b, a>0, b>0)$$

**Solución.**

■

### 4.7.10. Ejercicios Propuestos (p. 219)

**Ejerc. 197 - 203**

**Ejercicio Propuesto 197.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{sen(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\, dx \quad (\lambda > 0,\ a > 0)$$

**Solución.**
Como la función del integrando es par se tiene que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{sen(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\, dx.$$

Puesto que $\lambda > 0$ y los polinomios

$$P(z) = 1 \ \text{ y } \ Q(z) = z(z^2+a^2) = z(z-ai)(z+ai)$$

verifican
1) no tienen factores comunes
2) $gr(Q) = 3 \geq gr(P) + 1$
3) $Q$ tiene un cero simple en 0 que es un cero de $sen\,(\lambda x)$

se sigue de 4.7.8 que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\, dx = Im\left[2\pi i\, Res(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, ai) + \pi i\, Res(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, 0)\right].$$

Calculemos estos residuos

$$Res(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, ai) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{i\lambda z}}{z(z^2+a^2)} =$$

$$\lim_{z\to ai}\frac{e^{i\lambda z}}{z(z+ai)} = \frac{e^{-\lambda a}}{ai2ai} = -\frac{e^{-\lambda a}}{2a^2}$$

y

$$Res(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, 0) = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{i\lambda z}}{z(z^2+a^2)} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\, dx = Im\left[2\pi i\left(-\frac{e^{-\lambda a}}{2a^2}\right) + \pi i\,\frac{1}{a^2}\right] =$$

$$Im\left[\frac{\pi i\,(1-e^{-\lambda a})}{a^2}\right]=\frac{\pi}{a^2}\,(1-e^{-\lambda a}).$$

■

**Ejercicio Propuesto 198.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen\,x}{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}\,dx$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 199.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\,x}{(x-\frac{\pi}{2})(x^2+1)}\,dx$$

**Solución.**

■

**Ejercicio Propuesto 200.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,sen\,\pi x}{x^2-5x+6}\,dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 201.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\,\lambda x}{x}\,\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \quad (a>0,\ b^2-4ac<0)$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 202.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\,x}{x(x^2-\pi^2)}\,dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 203.**
*Usando el método de residuos calcula la integral siguiente:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\,\pi x}{x(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$$

**Solución.**

$\blacksquare$

### 4.7.12. Ejercicios Propuestos (p. 222)

**Ejerc. 204 - 210**

#### 4.7.15. Ejercicios Propuestos (p. 230)

**Ejerc. 211 - 216**

### 4.7.18. Ejercicios Propuestos (p. 233)

**Ejerc. 217 - 223**

### 4.7.21. Ejercicios Propuestos (p. 239)

**Ejerc. 232 - 263**

**Ejercicio Propuesto 238.**
*Integrando la función*
$$f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$
*a lo largo de la mitad superior del anillo* $A(0;\varepsilon, R)$ *deducir que*
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}.$$

**Solución.**
Llamemos $\Gamma_{\varepsilon,R}$ al camino cerrado determinado por la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon, R)$. Como $f$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $\Gamma^*_{\varepsilon,R}$ está contenido en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ se sigue que
$$I = \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz = 0.$$

Por otra parte, denotando $C_R$ al camino determinado por la mitad superior de la circunferencia $C(0, R)$ y $C_\varepsilon$ al camino determinado por la mitad superior de la circunferencia $C(0, \varepsilon)$, y escribiendo
$$\Gamma_{\varepsilon,R} = [\varepsilon, R] + C_R + [-R, -\varepsilon] - C_\varepsilon$$
tenemos que
$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz = \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\, dz + \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\, dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz.$$
Estudiemos por separado cada una de estas integrales

-Para $t \in [\varepsilon, R]$ tenemos que
$$f(t) = \frac{e^{3it} - 3e^{it} + 2}{t^3} = \frac{1}{t^3}\left[(cos\, t + i\, sen\, t)^3 - 3(cos\, t + i\, sen\, t) + 2\right] =$$
$$\frac{1}{t^3}\left[cos^3 t + i\, 3cos^2 t\, sen\, t - 3cos\, t\, sen^2 t - isen^3 t - 3cos\, t - i3\, sen\, t + 2\right] =$$
$$\frac{1}{t^3}\left[(cos^3 t - 3cos\, t\, sen^2 t - 3cos\, t + 2) + i\,(3cos^2 t\, sen\, t - sen^3 t - 3sen\, t)\right] =$$
$$\alpha(t) - i4\, \frac{sen^3 t}{t^3},$$

donde se ha llamado

$$\alpha(t) = \frac{1}{t^3}\,(cos^3\, t - 3cos\, t\, sen^2\, t - 3cos\, t + 2)$$

y se ha tenido en cuenta que

$$3cos^2\, t\, sen\, t - sen^3\, t - 3sen\, t = 3sen\, t\,(cos^2\, t - 1) - sen^3\, t =$$

$$-3sen\, t\, sen^2\, t - sen^3\, t = -4sen^3\, t.$$

En consecuencia,

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)\, dz = \int_{\varepsilon}^{R} f(t)\, dt = \int_{\varepsilon}^{R} \alpha(t)\, dt - i4 \int_{\varepsilon}^{R} \frac{sen^3\, t}{t^3}\, dt.$$

- Notemos que si $\mid z \mid = R$, entonces $0 \leq Im(z) \leq R$, y por tanto

$$\mid e^{3iz} \mid = e^{Re(3iz)} = e^{-3Im(z)} \leq e^0 = 1$$

y

$$\mid e^{iz} \mid = e^{Re(iz)} = e^{-Im(z)} \leq e^0 = 1,$$

y por tanto

$$\mid f(z) \mid = \frac{\mid e^{3iz} - 3e^{iz} + 2 \mid}{\mid z \mid^3} \leq \frac{\mid e^{3iz} \mid + 3 \mid e^{iz} \mid + 2}{R^3} \leq$$

$$\frac{1+3+2}{R^3} = \frac{6}{R^3},$$

y por tanto, por la acotación básica,

$$\mid \int_{C_R} f(z)\, dz \mid \leq \pi R\, \frac{6}{R^3} = \frac{6\pi}{R^2},$$

por lo que $\int_{C_R} f(z)\, dz$ converge a 0 cuando $R \to +\infty$.

-Veamos que la tercera integral coincide con la primera.

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\, dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\, dt =$$

(haciendo el cambio de variable $s = -t$)

$$-\int_{R}^{\varepsilon} f(-s)\, ds = \int_{\varepsilon}^{R} f(-s)\, ds =$$

(teniendo en cuenta que $f$ es par)

$$\int_{\varepsilon}^{R} f(s)\,ds = \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz.$$

- Para estudiar la cuarta integral, empecemos notando que

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^2} =$$

(por L'Hôpital)

$$\lim_{z\to 0} \frac{3ie^{3iz} - 3ie^{iz}}{2z} =$$

(por L'Hôpital)

$$\lim_{z\to 0} \frac{-9e^{3iz} + 3e^{iz}}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Luego $f$ tiene en 0 un polo de orden 1, y además $Res(f,0) = -3$. Por tanto

$$f(z) = \frac{-3}{z} + g(z)$$

con $g$ una función entera. En consecuencia,

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{-3}{z}\,dz + \int_{C_\varepsilon} g(z)\,dz.$$

Notemos que

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{-3}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{-3}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\,dt =$$

$$\int_0^{\pi} -3i\,dt = -3it\ \Big]_0^{\pi} = -3i\pi,$$

y por tanto

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -3i\pi + \int_{C_\varepsilon} g(z)\,dz.$$

Como $g$ es continua en $\overline{D}(0,1)$ se tiene que $g$ está acotada en $\overline{D}(0,1)$, y por tanto

$$\exists M > 0\ :\quad |\, g(z) \,| \leq M, \quad \forall z \in \overline{D}(0,1).$$

En consecuencia, para $0 < \varepsilon \leq 1$ se tendrá, por la acotación básica, que

$$\left|\, \int_{C_\varepsilon} g(z)\,dz \,\right| \leq \varepsilon\pi M,$$

y por tanto $\int_{C_\varepsilon} g(z)\,dz$ converge a 0 cuando $\varepsilon \to 0$.

- Juntando todos los resultados obtenidos se obtiene que

$$0 = Im(I) = 2\left(-4\int_{\varepsilon}^{R} \frac{sen^3 t}{t^3}\,dt\right) + Im\int_{C_R} f(z)\,dz -$$

$$\left(-3\pi + Im\int_{C_\varepsilon} g(z)\,dz\right).$$

Tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$ se obtiene que

$$0 = -8\int_{0}^{+\infty} \frac{sen^3 t}{t^3}\,dt + 3\pi.$$

Despejando se obtiene que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{sen^3 t}{t^3}\,dt = \frac{3\pi}{8}.$$

■

### 4.8.3. Ejercicios Propuestos (p. 251)

**Ejerc. 264 - 265**

**Ejercicio Propuesto 264.a)**
*Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisará), se verifica la siguiente igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\, coth\, \pi a - \frac{1}{a^2}\right).$$

**Solución.**
Teniendo en cuenta que $\frac{1}{n^2+a^2}$ es par en $n$ se sigue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}\right).$$

Nótese que para que todas las expresiones que intervienen tengan sentido hemos de imponer que $a \notin \mathbb{Z}i$.

Puesto que los polinomios

$$P(z) = 1 \ \text{ y } \ Q(z) = z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai)$$

verifican

1) $P$ y $Q$ no tienen factores comunes

2) $gr(Q) = 2 \geq gr(P) + 1$

por 4.8.1 se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\left[Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2}, ai) + Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2}, -ai)\right].$$

Puesto que los ceros de la función $\pi\, cotg\, \pi z$ son simples, en cada uno de los puntos $ai$ y $-ai$, la función $\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2}$ es o bien regular o bien tiene un polo de orden 1. En cualquier situación se tiene que

$$Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2}, ai) = \lim_{z\to ai}(z - ai)\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2} = \lim_{z\to ai} \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z+ai} =$$

$$\frac{\pi\, cotg\, \pi ai}{2ai} = -\frac{\pi}{2a}\, coth(\pi a)$$

y

$$Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2}, -ai) = \lim_{z\to -ai}(z + ai)\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^2+a^2} = \lim_{z\to -ai} \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z-ai} =$$

$$\frac{\pi\, cotg\,(-\pi ai)}{-2ai} = \frac{-\pi\, cotg\,(\pi ai)}{-2ai} = -\frac{\pi}{2a}\, coth(\pi a),$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$cos(iz) = cosh\, z \quad \text{y} \quad sen(iz) = i\, senh\, z,$$

y por tanto

$$cotg(iz) = \frac{1}{i}\, coth\, z.$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\, coth(\pi a),$$

y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\,(-\frac{1}{a^2} + \frac{\pi}{a}\, coth\, \pi a).$$

■

**Ejercicio Propuesto 264.b)**
*Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisará), se verifica la siguiente igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}\,(cotg\, \pi a + coth\, \pi a).$$

**Solución.**
Teniendo en cuenta que la expresión $\frac{1}{n^4-a^4}$ es par en $n$ se sigue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4-a^4} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^4-a^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^4} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4-a^4}\right).$$

Nótese que para que todas las expresiones que intervienen tengan sentido hemos de imponer que $a \notin \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}i$.

Puesto que los polinomios

$$P(z) = 1 \;\text{ y }\; Q(z) = z^4-a^4 = (z^2-a^2)(z^2+a^2) = (z-a)(z+a)(z-ai)(z+ai)$$

verifican

1) $P$ y $Q$ no tienen factores comunes

2) $gr(Q) = 4 \geq gr(P) + 1$

por 4.8.1 se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = -\left[ Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, a) + Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, -a) + \right.$$

$$\left. Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, ai) + Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, -ai) \right].$$

Puesto que los ceros de la función $\pi\, cotg\, \pi z$ son simples, y los puntos $\pm a$ y $\pm ai$ son ceros simples de $z^4 - a^4$, se sigue que la función $\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}$ es o bien regular o bien tiene un polo de orden 1 en cada uno de estos cuatro puntos. En cualquier caso se tiene que

$$Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, a) = \lim_{z \to a} (z - a) \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4} = \lim_{z \to a} \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{(z + a)(z^2 + a^2} =$$

$$\frac{\pi\, cotg\, \pi a}{2a 2a^2} = \frac{\pi}{4a^3}\, cotg\, \pi a,$$

$$Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, -a) = \lim_{z \to -a} (z + a) \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4} = \lim_{z \to -a} \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{(z - a)(z^2 + a^2)} =$$

$$\frac{\pi\, cotg\, (-\pi a)}{(-2a)(2a^2)} = \frac{-\pi\, cotg\, \pi a}{-4a^3} = \frac{\pi}{4a^3}\, cotg\, \pi a,$$

$$Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, ai) = \lim_{z \to ai} (z - ai) \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4} = \lim_{z \to ai} \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{(z^2 - a^2)(z + ai} =$$

$$\frac{\pi\, cotg\, \pi ai}{-2a^2 2ai} = -\frac{\pi\, cotg\, \pi ai}{4a^3 i} = \frac{\pi}{4a^3}\, coth(\pi a)$$

y

$$Res(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4}, -ai) = \lim_{z \to -ai} (z + ai) \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{z^4 - a^4} = \lim_{z \to -ai} \frac{\pi\, cotg\, \pi z}{(z^2 - a^2)(z - ai)} =$$

$$\frac{\pi\, cotg\, (-\pi ai)}{(-2a^2)(-2ai)} = \frac{-\pi\, cotg\, (\pi ai)}{4a^3 i} = \frac{\pi}{4a^3}\, coth(\pi a),$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$cos(iz) = cosh\, z \ \text{ y } \ sen(iz) = i\, senh\, z,$$

y por tanto

$$cotg(iz) = \frac{1}{i}\, coth\, z.$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = -\left[\frac{\pi\, cotg\,(\pi a)}{2a^3} + \frac{\pi}{2a^3}\, coth(\pi a)\right] = -\frac{\pi}{2a^3}\,[cotg\,(\pi a) + coth\,(\pi a)],$$

y finalmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{2a^3}\,[cotg\,(\pi a) + coth\,(\pi a)].$$

■

**Ejercicio Propuesto 264.c)**
*Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisará), se verifica la siguiente igualdad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{sen^2\, \pi a}.$$

**Solución.**
Nótese que para que todos los sumandos de la serie tengan sentido hemos de imponer de entrada que $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Puesto que los polinomios

$$P(z) = 1 \ \text{ y } \ Q(z) = (z-a)^2$$

verifican
 1) $P$ y $Q$ no tienen factores comunes
 2) $gr(Q) = 2 \geq gr(P) + 1$
por 4.8.1 se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = -Res\left(\frac{\pi\, cotg\, \pi z}{(z-a)^2}, a\right).$$

Puesto que los ceros de $\pi cotg\,(\pi z)$ son simples y $a$ es un cero de orden 2 de $(z-a)^2$, se tiene que la función

$$\frac{\pi\, cotg\,(\pi z)}{(z-a)^2}$$

tiene un polo de orden 1 u 2 en $a$, y por tanto tenemos que

$$Res(\frac{\pi\, cotg\,\pi z}{(z-a)^2},a) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2\frac{\pi\, cotg\,\pi z}{(z-a)^2}\right] = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\,[\pi\, cotg\,\pi z] =$$

$$\lim_{z\to a}\frac{-\pi^2}{sen^2\,\pi z} = \frac{-\pi^2}{sen^2\,\pi a}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-a)^2} = -\frac{-\pi^2}{sen^2\,\pi a} = \frac{\pi^2}{sen^2\,\pi a}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 264.d)**
*Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisará), se verifica la siguiente igualdad*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a\, senh\,\pi a}.$$

**Solución.**
Teniendo en cuenta que $\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$ es par en $n$ se sigue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} =$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}.$$

Nótese que para que todas las series que intervienen tengan sentido hemos de imponer que $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}i$.

Puesto que los polinomios

$$P(z) = 1 \ \text{ y } \ Q(z) = z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai)$$

verifican

1) $P$ y $Q$ no tienen factores comunes

2) $gr(Q) = 2 \geq gr(P) + 1$

por 4.8.2 se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\left[Res(\frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2 + a^2}, ai) + Res(\frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2 + a^2}, -ai)\right].$$

Puesto que $a \notin \mathbb{Z}i$, se sigue que $ai$ y $-ai$ no son enteros. Como quiera que $\mathbb{Z}$ es el conjunto de polos (simples) de $\pi\, cosec\, \pi z$, se sigue que $ai$ y $-ai$ son polos simples de la función $\frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2+a^2}$, y por tanto tenemos que

$$Res(\frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2 + a^2}, ai) = \lim_{z \to ai} (z - ai) \frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2 + a^2} = \lim_{z \to ai} \frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z + ai} =$$

$$\frac{\pi}{2ai\, sen\, \pi ai} = -\frac{\pi}{2a\, senh(\pi a)}$$

y

$$Res(\frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2 + a^2}, -ai) = \lim_{z \to -ai} (z + ai) \frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z^2 + a^2} = \lim_{z \to -ai} \frac{\pi\, cosec\, \pi z}{z - ai} =$$

$$\frac{\pi\, cosec\, (-\pi ai)}{-2ai} = \frac{-\pi}{-2ai\, sen\, (-\pi ai)} = -\frac{\pi}{2a\, senh(\pi a)}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a\, senh(\pi a)},$$

y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a\, senh\, (\pi a)}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 264.e)**

*Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisará), se verifica la siguiente igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} (\frac{1}{sen\, \pi a} + \frac{1}{senh\, \pi a}).$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 265.a**
*Integrando la función*

$$z \to \frac{\pi sen\, az}{z^3 sen\, \pi a}$$

*a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son* $(\pm 1 \pm i)(n + \frac{1}{2})$*, donde* $n \in \mathbb{N}$*, calcula la suma de la serie.*

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{sen\, an}{n^3}.$$

**Solución.**

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 265.b**
*Integrando la función*

$$z \to \frac{\pi sen\, az}{z^3 sen\, \pi a}$$

*a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son* $(\pm 1 \pm i)(n + \frac{1}{2})$*, donde* $n \in \mathbb{N}$*, calcula la suma de la serie.*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

**Solución.**

$\blacksquare$

### 4.9.1. Ejercicios Propuestos (p. 265)

**Ejerc. 266 - 292**

**Ejercicio Propuesto 266.a)**
*Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha del siguiente polinomio*

$$P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10.$$

**Solución.**
$P$ es un polinomio de grado $n = 4$ y el semiplano de la derecha es la región angular determinada por

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^4 + 2(-it)^3 - 2(-it) + 10 = t^4 + 2it^3 + 2it + 10 =$$

$$t^4 + 10 + i(2t^3 + 2t) = (t^4 + 10) + i2t(t^2 + 1).$$

Pot tanto $Re\,\varphi(t) = t^4 + 10 > 10$, y por tanto $\varphi(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y que $Im\,\varphi(t) = 2t(t^2 + 1)$ no se anula mas que para $t = 0$, siendo

$$Im\,\varphi(t) < 0 \text{ para } t < 0$$

y

$$Im\,\varphi(t) > 0 \text{ para } t > 0.$$

Estos datos quedan recogidos en la siguiente tabla

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $+$ | $-$ | $4^o$ Cuadr. |
| $t = 0$ | 10 | 0 | 10 |
| $0 < t$ | $+$ | $+$ | $1^{er}$ Cuadr. |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el cuarto cuadrante, atraviesa el eje real por el punto 10 (para $t = 0$) pasando al primer cuadrante que es por donde sale de escena. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = arctg\, \frac{2t^3 + 2t}{t^4 + 10}.$$

Como quiera que

$$\lim_{t \to -\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \theta(t) = arctg\, 0 = 0,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t \to +\infty} \theta(t) - \lim_{t \to -\infty} \theta(t)) = \frac{4\pi}{2\pi} + 0 = 2.$$

■

**Ejercicio Propuesto 266.b)**
*Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha del siguiente polinomio*

$$P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - 10.$$

**Solución.**
$P$ es un polinomio de grado $n = 4$, y el semiplano de la derecha es la región angular determinada por

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \le 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \ge 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^4 + 2(-it)^3 - 2(-it) - 10 = t^4 + 2it^3 + 2it - 10 =$$

$$t^4 - 10 + i(2t^3 + 2t) = (t^4 - 10) + i2t(t^2 + 1).$$

Pot tanto $Im\,\varphi(t) = 2t(t^2+1)$ se anula únicamente para $t = 0$ y se tiene que $\varphi(0) = -10$, se sigue que $\varphi$ atraviesa el eje real una sola vez por el punto $-10$. Notemos también que

$$Re\,\varphi(t) > 0 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) < 0 \ \text{ para } \ t < 0 \text{ "grande"}$$

y

$$Re\,\varphi(t) > 0 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) > 0 \ \text{ para } \ t > 0 \text{ "grande".}$$

Estos datos que dan recogidos en la siguiente tabla

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $+$ ($\lvert t\rvert$ grande) | $-$ | $4^o$ Cuadr. ($\lvert t\rvert$ grande) |
| $t = 0$ | $-10$ | $0$ | $-10$ |
| $0 < t$ | $+$ ($\lvert t\rvert$ grande) | $+$ | $1^{er}$ Cuadr. ($\lvert t\rvert$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el cuarto cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-10$ (para $t = 0$) y sale de escena por el primer cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t < 0 \\ -2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} arctg\,\frac{2t^3+2t}{t^4-10} = arctg\,0 = 0,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(-2\pi + arctg\,\frac{2t^3+2t}{t^4-10}\right) = -2\pi + arctg\,0 = -2\pi,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{4\pi}{2\pi} + \frac{-2\pi-0}{2\pi}0 = 2 - 1 = 1.$$

Obsérvese que también podíamos haber tomado como argumento continuo para $\varphi$ la función $\theta_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta_0(t) = arg_0(\varphi(t)).$$

Nótese que
$$\theta_0(t) = 2\pi + \theta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
■

**Ejercicio Propuesto 266.c)**
*Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha del siguiente polinomio*
$$P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6.$$

**Solución.**
$P$ es un polinomio de grado $n = 6$, y el semiplano de la derecha es la región angular determinada por
$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$
Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por
$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$
Nótese que
$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^6 - (-it)^3 - 4(-it) + 6 = -t^6 - it^3 + 4it + 6 =$$
$$(-t^6 + 6) + i(-t^3 + 4t) = (-t^6 + 6) + i(-t(t-2)(t+2)).$$
Pot tanto
$$Re\,\varphi(t) = -t^6 + 6 \text{ y } Im\,\varphi(t) = -t(t-2)(t+2).$$
Se tiene entonces que
$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2, 0, 2$$
y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < -2$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = -2$ | $-58$ | $0$ | $-58$ |
| $-2 < t < 0$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = 0$ | $6$ | $0$ | $6$ |
| $0 < t < 2$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 2$ | $-58$ | $0$ | $-58$ |
| $2 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-58$ (para $t = -2$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto 6 (para $t = 0$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto $-58$ (para $t = 2$), y sale de escena por el tercer cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t \leq -2 \\ 2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad -2 < t \leq 2 \\ 4\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad 2 < t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} \left(\pi + arctg\,\frac{-t^3 + 4t}{-t^6 + 6}\right) = \pi + arctg\,0 = \pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(4\pi - \pi + arctg\,\frac{-t^3 + 4t}{-t^6 + 6}\right) = 3\pi + arctg\,0 = 3\pi,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{6\pi}{2\pi} + \frac{3\pi - \pi}{2\pi} = 3 + 1 = 4.$$

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 266.d)**

*Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha del siguiente polinomio*

$$P(z) = z^5 + 5z^3 + 11z^2 + 4z + 1.$$

**Solución.**
$P$ es un polinomio de grado $n = 5$ y el semiplano derecho es la región angular determinada por

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \ \text{ y } \ \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^5 + 5(-it)^3 + 11(-it)^2 + 4(-it) + 1 =$$

$$-it^5 + 5it^3 - 11t^2 - 4it + 1 = -11t^2 + 1 + i(-t^5 + 5t^3 - 4t) =$$

$$(-11t^2 + 1) + i(-t(t^4 - 5t^2 + 4)).$$

Puesto que

$$t^4 - 5t^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

y por tanto

$$t^4 - 5t^2 + 4 = (t^2 - 1)(t^2 - 4) = (t - 1)(t + 1)(t - 2)(t + 2),$$

se sigue que

$$Re\, \varphi(t) = -11t^2 + 1 \ \text{ y } \ Im\, \varphi(t) = -t(t - 1)(t + 1)(t - 2)(t + 2).$$

Se tiene entonces que

$$Im\, \varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2, -1, 0, 1, 2$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < -2$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = -2$ | $-43$ | $0$ | $-43$ |
| $-2 < t < -1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = -1$ | $-10$ | $0$ | $-10$ |
| $-1 < t < 0$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 0$ | $1$ | $0$ | $1$ |
| $0 < t < 1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = 1$ | $-10$ | $0$ | $-10$ |
| $1 < t < 2$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 2$ | $-43$ | $0$ | $-43$ |
| $2 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-43$ (para $t = -2$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-10$ (para $t = -1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto 1 (para $t = 0$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-10$ (para $t = 1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto $-43$ (para $t = 2$), y sale de escena por el tercer cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t \leq -2 \\ 2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad -2 < t < -1 \\ arg(\varphi(t)) & si \quad -1 \leq t < 1 \\ -2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad 1 \leq t \leq 2 \\ arg(\varphi(t)) & si \quad 2 < t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} \left( \pi + arctg\, \frac{-t^5 + 5t^2 + 4}{-11t^2 + 1} \right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \left( -\pi + arctg\, \frac{-t^5 + 5t^2 + 4}{-11t^2 + 1} \right) = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{5\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 266.e)**
*Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha del siguiente polinomio*

$$P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1.$$

**Solución.**
$P$ es un polinomio de grado $n = 6$ y el semiplano de la derecha es la región angular determinada por

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^6 + (-it)^5 + 6(-it)^4 + 5(-it)^3 + 8(-it)^2 + 4(-it) + 1 =$$

$$-t^6 - it^5 + 6t^4 + 5it^3 - 8t^2 - 4it + 1 = (-t^6 + 6t^4 - 8t^2 + 1) + i(-t(t^4 - 5t^2 + 4))$$

Puesto que

$$t^4 - 5t^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

y por tanto

$$t^4 - 5t^2 + 4 = (t^2 - 1)(t^2 - 4) = (t-1)(t+1)(t-2)(t+2),$$

se sigue que

$$Re\,\varphi(t) = -t^6 + 6t^4 - 8t^2 + 1 \text{ y } Im\,\varphi(t) = -t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2).$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2, -1, 0, 1, 2$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t<-2$ | $-$ ($\mid t\mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t\mid$ grande) |
| $t=-2$ | 1 | 0 | 1 |
| $-2<t<-1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t=-1$ | $-2$ | 0 | $-2$ |
| $-1<t<0$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t=0$ | 1 | 0 | 1 |
| $0<t<1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t=1$ | $-2$ | 0 | $-2$ |
| $1<t<2$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t=2$ | 1 | 0 | 1 |
| $2<t$ | $-$ ($\mid t\mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t\mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto 1 (para $t=-2$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-2$ (para $t=-1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto 1 (para $t=0$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-2$ (para $t=1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto 1 (para $t=2$), y sale de escena por el tercer cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t)=\begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t<-1 \\ -2\pi+arg(\varphi(t)) & si \quad -1\le t<1 \\ -4\pi+arg(\varphi(t)) & si \quad 1\le t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty}\theta(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(\pi+arctg\,\frac{-t^5+5t^3-4t}{-t^6+6t^4-8t^2+1}\right)=\pi+arctg\,0=\pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-4\pi-\pi+arctg\,\frac{-t^5+5t^3-4t}{-t^6+6t^4-8t^2+1}\right)=$$
$$-5\pi+arctg-\ 0=-5\pi,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty}\theta(t)-\lim_{t\to-\infty}\theta(t))=\frac{6\pi}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(-5\pi-\pi)=3-3=0.$$

■

**Ejercicio Propuesto 266.f)**
*Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha del siguiente polinomio*

$$P(z)=z^6-3z^5+2z^2+5.$$

**Solución.**
$P$ es un polinomio de grado $n=6$ y el semiplano de la derecha es la región angular determinada por

$$\alpha=-\frac{\pi}{2}\ \text{ y }\ \beta=\frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t)=\begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t\leq 0\\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t\geq 0\end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t)=P(-it)=(-it)^6-3(-it)^5+2(-it)^2+5=$$
$$-t^6+3it^5-2t+5=(-t^6-2t+5)+i(3t^5)$$

Por tanto

$$Re\,\varphi(t)=-t^6-2t+5\ \text{ y }\ Im\,\varphi(t)=3t^5.$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t)=0\quad\Leftrightarrow\quad t=0$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t<0$ | $-$ (\| $t$ \| grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. (\| $t$ \| grande) |
| $t=0$ | 5 | 0 | 5 |
| $0<t$ | $-$(\| $t$ \| grande) | $+$ | $2^{o}$ Cuadr. (\| $t$ \| grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el tercer cuadrante, atraviesa el eje real por el punto 5 (para $t=0$), y sale de escena por el segundo cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t))$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} \left( -\pi + arctg \frac{3t^5}{-t^6 - 2t + 5} \right) = -\pi + arctg\, 0 = -\pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \left( \pi + arctg \frac{3t^5}{-t^6 - 2t + 5} \right) = \pi + arctg\, 0 = \pi,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{6\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\pi+\pi) = 3+1 = 4.$$

■

**Ejercicio Propuesto 267**
*Sea $f$ una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$ tal que $|f(z)| < 1$ siempre que $|z| = 1$. Prueba que $f$ tiene exactamente un punto fijo en $D(0,1)$.*

**Solución.**
Consideremos las funciones

$$\varphi(z) = f(z) - z, \quad \forall z \in \overline{D}(0,1)$$

y

$$\psi(z) = -z, \quad \forall z \in \overline{D}(0,1).$$

Es claro que

$$\varphi, \psi \in C(\overline{D}(0,1)) \cap \mathcal{H}(D(0,1)).$$

Además, si $\mid z \mid= 1$ se tiene que

$$\mid \varphi(z) - \psi(z) \mid = \mid f(z) \mid < 1 = \mid \psi(z) \mid \leq \mid \varphi(z) \mid + \mid \psi(z) \mid .$$

Por el Teorema de Rouché, $\varphi$ y $\psi$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. Como $\psi$ tiene únicamente un cero simple en 0, se sigue que $\varphi$ tiene un único cero en $D(0,1)$, esto es, $f$ tiene un único punto fijo en $D(0,1)$.

■

**Ejercicio Propuesto 268**
*Calcula la distribución por cuadrantes de los ceros del polinomio*

$$P(z) = z^8 + z^5 - z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 2z + 5.$$

**Solución.**
Empecemos estudiando el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha, que es la región angular está determinada por

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \ \text{ y } \ \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^8 + (-it)^5 - (-it)^4 + 3(-it)^3 + 6(-it)^2 + 2(-it) + 5 =$$

$$t^8 - it^5 - t^4 + 3it^3 - 6t^2 - 2it + 5 = (t^8 - t^4 - 6t^2 + 5) + i(-t(t^4 - 3t^2 + 2))$$

Puesto que

$$t^4 - 3t^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

y por tanto

$$t^4 - 3t^2 + 2 = (t^2 - 1)(t^2 - 2) = (t-1)(t+1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}),$$

se sigue que

$$Re\,\varphi(t) = t^8 - t^4 - 6t^2 + 5 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = -t(t-1)(t+1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}).$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < -\sqrt{2}$ | $+$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $1^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = -\sqrt{2}$ | $5$ | $0$ | $5$ |
| $-\sqrt{2} < t < -1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = -1$ | $-1$ | $0$ | $-1$ |
| $-1 < t < 0$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 0$ | $5$ | $0$ | $5$ |
| $0 < t < 1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = 1$ | $-1$ | $0$ | $-1$ |
| $1 < t < \sqrt{2}$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = \sqrt{2}$ | $5$ | $0$ | $5$ |
| $\sqrt{2} < t$ | $+$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $4^{o}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el primer cuadrante, atraviesa el eje real por el punto 5 (para $t = -\sqrt{2}$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-1$ (para $t = -1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto 5 (para $t = 0$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-1$ (para $t = 1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto 5 (para $t = \sqrt{2}$), y sale de escena por el cuarto cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t < -1 \\ -2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad -1 \leq t < 1 \\ -4\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad 1 \leq t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t \to -\infty} \theta(t) = \lim_{t \to -\infty} arctg\, \frac{-t^5 + 3t^3 - 2t}{t^8 - t^4 - 6t^2 + 5} = arctg\, 0 = 0,$$

y

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \left( -4\pi + arctg\, \frac{-t^5 + 3t^3 - 2t}{t^8 - t^4 - 6t^2 + 5} \right) =$$

$$-4\pi + arctg\, 0 = -4\pi,$$

y $P$ es un polinomio de grado $n = 8$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{8\pi}{2\pi} + \frac{-4\pi}{2\pi} = 4 - 2 = 2.$$

Luego $P$ tiene 2 ceros en el semiplano derecho y 6 en el semiplano izquierdo. Puesto que $P$ es un polinomio con coeficientes reales resulta que si $z_0$ es un cero de $P$, también $\overline{z_0}$ es un cero de $P$ (con igual orden). Por consiguiente, si $P$ no se anulara en $\mathbb{R}$, podríamos ya establecer la distribución por cuadrantes de los ceros de $P$.

Como quiera que $P(0) = 5$, si $P$ no se anulara en $\mathbb{R}$, por el teorema del valor intermedio, tendría que ser $P(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Vemos que en efecto así es, completando cuadrados convenientemente:

$$P(x) = x^8 + x^5 - x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 5 =$$

$$x^8 + x^5 - x^4 + \frac{3}{2}\left[(x^2+x)^2 - x^4 - x^2\right] + 6x^2 + 2x + 5 =$$

$$x^8 + x^5 - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + \frac{9}{2}\,x^2 + 2x + 5 =$$

$$x^8 + \left[(\frac{x^4}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2}\,x^8 - \frac{1}{2}\,x^2\right] - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + \frac{9}{2}\,x^2 + 2x + 5 =$$

$$\frac{1}{2}\,x^8 + (\frac{x^4}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}})^2 - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + 4x^2 + 2x + 5 =$$

$$\frac{1}{2}\,x^8 + (\frac{x^4}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}})^2 + \left[(\frac{x^4}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2}\,x^8 - \frac{25}{8}\right] + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + 4x^2 + 2x + 5 =$$

$$(\frac{x^4}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{x^4}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + 4x^2 + 2x + \frac{15}{8} =$$

$$(\frac{x^4}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{x^4}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + 4x^2 + \left[(x+1)^2 - x^2 - 1\right] + \frac{15}{8} =$$

$$(\frac{x^4}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{x^4}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2}\,(x^2+x)^2 + 3x^2 + (x+1)^2 + \frac{7}{8} \geq$$

$$\frac{7}{8} > 0.$$

Por consiguiente $P$ no tiene ningún cero en $\mathbb{R}$, y por lo anterior se sigue que $P$ tiene:

1 cero en el primer cuadrante,
1 cero en el cuarto cuadrante,
3 ceros en el segundo cuadrante, y
3 ceros en el tercer cuadrante. ■

**Ejercicio Propuesto 269**
*Dados un número natural $n$ y dos números reales distintos de cero $a$ y $b$, determínese el número de ceros del polinomio $z^{2n} + az^{2n-1} + b^2$ situados en el semiplano de la derecha.*

**Solución.**
El polinomio
$$P(z) = z^{2n} + az^{2n-1} + b^2$$
tiene grado $2n$. El semiplano derecho es la región angular determinada por
$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \ \text{ y } \ \beta = \frac{\pi}{2}.$$
Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por
$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$
Nótese que
$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^{2n} + a(-it)^{2n-1} + b^2 = (-i)^{2n}t^{2n} + a(-i)^{2n-1}t^{2n-1} + b^2 =$$
$$(-1)^n t^{2n} + a(-1)^n it^{2n-1} + b^2 = (-1)^n t^{2n} + b^2 + i(-1)^n at^{2n-1}.$$
Por tanto
$$Re\,\varphi(t) = (-1)^n t^{2n} + b^2 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = (-1)^n at^{2n-1}.$$
Se tiene entonces que
$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.$$
Como quiera que $\varphi(0) = b^2 > 0$, se sigue que un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$\theta(t) = arg(\varphi(t)).$$

Supongamos que $n$ es par. Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = t^{2n} + b^2 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = at^{2n-1}.$$

Entonces

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $+$ | $-$ | $4^o$ Cuadr. |
| $t = 0$ | $b^2$ | $0$ | $b^2$ |
| $0 < t$ | $+$ | $+$ | $1^{er}$ Cuadr. |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el cuarto cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $b^2$ (para $t = 0$), y sale de escena por el primer cuadrante. Por tanto $\theta$ esta definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = arctg\,\frac{at^{2n-1}}{t^{2n} + b^2}.$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = arctg\,0 = 0,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = arctg\,0 = 0,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{2n\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(0 - 0) = \frac{2n\pi}{2\pi} = n.$$

Supongamos que $n$ es impar. Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = -t^{2n} + b^2 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = -at^{2n-1}.$$

Supongamos en primer lugar que $a > 0$. Entonces

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = 0$ | $b^2$ | $0$ | $b^2$ |
| $0 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $b^2$ (para $t = 0$), y sale de escena por el tercer cuadrante. Por tanto, para los $t$ con $\mid t \mid$ grande, $\theta$ esta definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = \pi + arctg\, \frac{-at^{2n-1}}{-t^{2n} + b^2} \quad \text{si} \quad t < 0 \text{ ”grande”}$$

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = -\pi + arctg\, \frac{-at^{2n-1}}{-t^{2n} + b^2} \quad \text{si} \quad t > 0 \text{ ”grande”}.$$

Como quiera que

$$\lim_{t \to -\infty} \theta(t) = \pi + arctg\, 0 = \pi,$$

y

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = -\pi + arctg\, 0 = -\pi,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{2n\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(-\pi - \pi) = n - 1.$$

Supongamos en segundo lugar que $a < 0$. Entonces

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = 0$ | $b^2$ | $0$ | $b^2$ |
| $0 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^0$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el tercer cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $b^2$ (para $t = 0$), y sale de escena por el segundo cuadrante. Por tanto, para $t$ con $\mid t \mid$ grande, $\theta$ esta definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = -\pi + arctg\, \frac{-at^{2n-1}}{-t^{2n} + b^2} \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{”grande”}$$

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = \pi + arctg\, \frac{-at^{2n-1}}{-t^{2n} + b^2} \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{”grande”}.$$

Como quiera que

$$\lim_{t \to -\infty} \theta(t) = -\pi + arctg\, 0 = -\pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \pi + arctg\, 0 = \pi,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{2n\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\pi - (-\pi)) = n + 1.$$

■

**Ejercicio Propuesto 270**
*Calcula el número de ceros del polinomio $P(z) = z^6 + z^3 + 4z^2 + 2$ en cada uno de los discos $D(0, \frac{1}{2})$, $D(0, 1)$ y $D(0, 2)$.*

**Solución.**

$$D(0, \frac{1}{2})$$

Consideremos las funciones

$$f(z) = P(z) = z^6 + z^3 + 4z^2 + 2$$

y

$$g(z) = 2$$

Si $\mid z \mid = \frac{1}{2}$, entonces

$$\mid f(z) - g(z) \mid = \mid z^6 + z^3 + 4z^2 \mid \leq \mid z \mid^6 + \mid z \mid^3 + 4 \mid z \mid^2 =$$

$$\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^3} + 1 < 2 = \mid g(z) \mid .$$

Por el Teorema de Rouché

[No. de ceros de $P$ en $D(0, \frac{1}{2})$] = [No. de ceros de $g$ en $D(0, \frac{1}{2})$] = 0.

$- - - - -$

$$D(0, 1)$$

Consideremos las funciones

$$f(z) = P(z) = z^6 + z^3 + 4z^2 + 2$$

y

$$g(z) = 4z^2.$$

Notemos que, para $| z |= 1$, tenemos que

$$| f(z) - g(z) |=| z^6 + z^3 + 2 |\leq| z |^6 + | z |^3 +2 = 4 =| 4z^2 |=| g(z) | .$$

Como quiera que

$$| z^6 + z^3 + 2 |= 4 \Leftrightarrow z^6 = z^3 = 1 = 1 \Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in [1^{\frac{1}{3}}],$$

no podemos usar la "versión débil" del Teorema de Rouché. Sin embargo, nótese que si $z$ es uno cualquiera de tales 3 valores se tiene que

$$| f(z) |=| z^6 + z^3 + 4z^2 + 2 |=| 4z^2 + 4 |= 4 | z^2 + 1 |> 0,$$

donde se ha tenido en cuenta que $z^6 = z^3 = 1$, y que por tanto $z^2 \neq -1$.

Por tanto se cumple la hipótesis del Teorema de Rouché ("versión fuerte")

$$| f(z) - g(z) |<| f(z) | + | g(z) | .$$

Por el Teorema de Rouché

[No. de ceros de $P$ en $D(0,1)$] = [No. de ceros de $g$ en $D(0,1)$] = 2.

$- - - - -$

$D(0,2)$

Consideremos las funciones

$$f(z) = P(z) = z^6 + z^3 + 4z^2 + 2$$

y

$$g(z) = z^6.$$

Notemos que, para $| z |= 2$, tenemos que

$$| f(z)-g(z) |=| z^3+4z^2+2 |\leq| z |^3 +4 | z |^2 +2 = 2^3+4.2^2+2 = 8+16+2 = 26$$

y

$$| g(z) |=| z |^6 = 2^6 = 64.$$

Luego

$$| f(z) - g(z) |<| g(z) | .$$

Por el Teorema de Rouché

$$[\text{No. de ceros de } P \text{ en } D(0,2)] = [\text{No. de ceros de } g \text{ en } D(0,2)] = 6.$$

■

**Ejercicio Propuesto 271**
*Justifica que para $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, la ecuación $e^z = az^n$ tiene $n$ soluciones distintas en $D(0,1)$.*

**Solución.**
Consideremos las funciones enteras

$$f(z) = e^z - az^n, \quad \text{y} \quad g(z) = -az^n.$$

Es claro que

$$f, g \in C(\overline{D}(0,1)) \cap \mathcal{H}(D(0,1)).$$

Además, si $| z |= 1$ se tiene que

$$| f(z) - g(z) |=| e^z |= e^{Re\, z} \leq$$

(teniendo en cuenta que $Re\, z \leq| z |= 1$, y el crecimiento de la exponencial real)

$$e < a =| -az^n |=| g(z) | .$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. Como $g$ tiene únicamente un cero de orden $n$ en 0, se sigue que $f$ tiene exactamente $n$ ceros en $D(0,1)$.

Finalmente, notemos que todos los ceros de $f$ en $D(0,1)$ son simples, y por tanto son todos distintos. Supongamos que $\alpha$ es un cero de $f$ en $D(0,1)$, esto es $f(\alpha) = 0$, o lo que es lo mismo $e^\alpha = a\alpha^n$. Puesto que

$$f'(z) = e^z - naz^{n-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

se sigue que

$$f'(\alpha) = e^\alpha - na\alpha^{n-1} = a\alpha^n - na\alpha^{n-1} = a\alpha^{n-1}(\alpha - n).$$

Como $e^{\alpha} = a\alpha^n$ se sigue que $\alpha \neq 0$; y como $\alpha \in D(0,1)$ se sigue que $\alpha \neq n$. Luego, $f'(\alpha) \neq 0$, y por tanto $\alpha$ es un cero simple de $f$. ■

**Ejercicio Propuesto 272**
*Prueba que la ecuación* $(z+1)e^{-z} = 2z-2$ *tiene solución única en el semiplano de la derecha.*

**Solución.**
Consideremos las funciones enteras

$$f(z) = (z+1)e^{-z} - (2z-2) \;\text{ y }\; g(z) = -(2z-2),$$

y notemos que para $R > 0$ suficientemente grande, en la frontera de

$$\Omega_R := \{z \in \mathbb{C} \,:\, Re\, z > 0 \;\text{ y }\; |\, z \,|< R\}$$

se verifica que

$$|\, f(z) - g(z) \,|<|\, g(z) \,| \,.$$

En efecto:

Si $z = it$ para $-R \leq t \leq R$, entonces

$$|\, f(z) - g(z) \,|=|\, (z+1)e^{-z} \,|=|\, z+1 \,||\, e^{-z} \,|=|\, it+1 \,||\, e^{-it} \,|=$$

$$|\, it+1 \,|=|\, it-1 \,|< 2 \,|\, it-1 \,|=|\, 2it-2 \,|=|\, 2z-2 \,|=|\, g(z) \,| \,.$$

Si $z = Re^{it}$ para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, entonces

$$|\, f(z) - g(z) \,|=|\, (z+1)e^{-z} \,|=|\, z+1 \,||\, e^{-z} \,|=|\, z+1 \,|\, e^{-R\cos t} \leq$$

(como $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 0 \leq \cos t \;\Rightarrow\; -R\cos t \leq 0 \;\Rightarrow\; e^{-R\cos t} \leq 1$)

$$|\, z+1 \,|\leq|\, z \,| + 1 = R+1 <$$

(como podemos suponer $R > 3$)

$$2R - 2 =|\, 2z \,| -2 \leq|\, 2z-2 \,|=|\, g(z) \,| \,.$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $\Omega_R$. Como $g$ tiene únicamente un cero simple en 1, se sigue que $f$ tiene exactamente 1 cero en el semiplano de la derecha.

Finalmente, notemos que dicho cero de $f$ en el semiplano de la derecha ha de ser real. Ello es consecuencia del teorema del valor intermedio si se tiene en cuenta que

$$f(0) = 1 + 2 = 3 > 0$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x+1}{e^x} - (2x-2)\right] = -\infty.$$

■

**Ejercicio Propuesto 273**

*Sea $0 < |a| < 1$ y $p \in \mathbb{N}$. Prueba que la ecuación $(z-1)^p = ae^{-z}$ tiene exactamente $p$ ceros simples en $D(1,1)$ y si $|a| \leq 1/2^p$ dichos ceros están en $D(1,1/2)$.*

**Solución.**

Consideremos las funciones enteras

$$f(z) = (z-1)^p - ae^{-z} \ \text{ y } \ g(z) = (z-1)^p.$$

Notemos que

$$| f(z) - g(z) | = | -ae^{-z} | = | a || e^{-z} | = | a | e^{-Re\, z}.$$

Teniendo en cuenta que

$$| z-1 | = 1 \ \Rightarrow \ 0 \leq Re\, z \leq 2 \ \Rightarrow \ -2 \leq -Re\, z \leq 0 \ \Rightarrow \ e^{-Re\, z} \leq e^0 = 1$$

se sigue que, para $z \in C(1,1)$ se verifica que

$$| f(z) - g(z) | \leq | a | < 1 = | z-1 |^p = | (z-1)^p | = | g(z) | \ .$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(1,1)$. Como $g$ tiene $p$ ceros en $D(1,1)$ (concretamente tiene un único cero de orden $p$ en 1), se sigue que $f$ tiene exactamente $p$ ceros en $D(1,1)$.

Finalmente, notemos que todos los ceros de $f$ en $D(1,1)$ son simples, y por tanto son todos distintos. Supongamos que $\alpha$ es un cero de $f$ en $D(1,1)$, esto es $f(\alpha) = 0$, o lo que es lo mismo

$$ae^{-\alpha} = (\alpha - 1)^p. \tag{4}$$

Puesto que
$$f'(z) = p(z-1)^{p-1} + ae^{-z}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$
se sigue que
$$f'(\alpha) = p(\alpha-1)^{p-1} + ae^{-\alpha} = p(\alpha-1)^{p-1} + (\alpha-1)^p = (\alpha-1+p)(\alpha-1)^{p-1}.$$
Como $a \neq 0$, por (4), se sigue que $\alpha \neq 1$; y como $\alpha \in D(1,1)$ se sigue que $\alpha \neq 1-p$. Luego, $f'(\alpha) \neq 0$, y por tanto $\alpha$ es un cero simple de $f$.

Supongamos finalmente que $\mid a \mid \leq \frac{1}{2^p}$. Considerando las funciones enteras $f$ y $g$ anteriores y teniendo en cuenta que
$$\mid z-1 \mid = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \leq Re\, z \leq \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; -Re\, z \leq -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; e^{-Re\, z} \leq e^{-\frac{1}{2}},$$
para $z \in C(1, \frac{1}{2})$, tenemos que
$$\mid f(z) - g(z) \mid \leq \frac{1}{2^p} e^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^p} = \mid z-1 \mid^p = \mid (z-1)^p \mid = \mid g(z) \mid .$$
Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(1, \frac{1}{2})$. Como $g$ tiene $p$ ceros en $D(1, \frac{1}{2})$ (concretamente tiene un único cero de orden $p$ en 1), se sigue que $f$ tiene exactamente $p$ ceros en $D(1, \frac{1}{2})$. ■

**Ejercicio Propuesto 274**
*Prueba que los ceros del polinomio $z^4 + iz^3 + 1$ pertenecen al disco $D(0, \frac{3}{2})$ y determina cuántos de ellos se hallan en el primer cuadrante.*

**Solución.**
Veamos que los cuatro ceros del polinomio
$$P(z) = z^4 + iz^3 + 1$$
están en el disco $D(0, \frac{3}{2})$ de dos maneras:

1) Usando el Teorema de Rouché.
Considérense las funciones
$$f(z) = P(z) = z^4 + iz^3 + 1 \;\text{ y }\; g(z) = z^4.$$

Si $| z |= \frac{3}{2}$, entonces

$$| f(z) - g(z) |=| iz^3 + 1 |\leq| z |^3 +1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$\frac{35}{8} < \frac{71}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 =| z^4 |=| g(z) | .$$

Por el Teorema de Rouché

[No. de ceros de $P$ en $D(0, \frac{3}{2})$] = [No. de ceros de $g$ en $D(0, \frac{3}{2})$] = 4.

2) Directamente
Si $| z |\geq \frac{3}{2}$, entonces

$$| P(z) |=| z^4 + iz^3 + 1 |\geq| z^4 | - | iz^3 + 1 |\geq| z^4 | - | iz^3 | - | 1 |=$$

$$| z |^4 - | z |^3 -1 =| z |^3 (| z | -1) - 1 \geq$$

(como $| z |\geq \frac{3}{2}$, se sigue que $| z | -1 \geq \frac{1}{2}$)

$$| z |^3 \frac{1}{2} - 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{2} - 1 > 0.$$

Luego $P$ tiene todos sus ceros en $D(0, \frac{3}{2})$.

Estudiemos el número de ceros de $P$ en el primer cuadrante. El primer cuadrante es la región angular determinada por

$$\alpha = 0 \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{i0}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que, si $t \leq 0$, entonces

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^4 + i(-it)^3 + 1 = t^4 - t^3 + 1 > 1,$$

y si $t \geq 0$, entonces

$$\varphi(t) = P(t) = t^4 + it^3 + 1 = (t^4 + 1) + it^3.$$

Luego $\varphi$ está valuada en el semiplano de la derecha, y por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = arctg\,\frac{Im\,\varphi(t)}{Re\,\varphi(t)} = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ arctg\,\frac{t^3}{t^4+1} & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} 0 = 0,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} arctg\,\frac{t^3}{t^4+1} = arctg\,0 = 0,$$

y $P$ es un polinomio de grado $n = 4$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el primer cuadrante es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{4\frac{\pi}{2}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(0-0) = 1.$$

■

**Ejercicio Propuesto 275**

*Prueba que todos los ceros del polinomio $z^8 + 3z^3 + 7z + 5$ se hallan situados en el anillo $A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$y que exactamente dos de ellos están en el primer cuadrante.*

**Solución.**

Empecemos notando que el polinomio

$$P(z) = z^8 + 3z^3 + 7z + 5$$

no tiene ceros en $\overline{D}(0, \frac{1}{2})$.

En efecto, si $\mid z \mid \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$\mid P(z) \mid = \mid z^8 + 3z^3 + 7z + 5 \mid \geq 5 - \mid z^8 + 3z^3 + 7z \mid \geq$$

$$5 - \mid z \mid^8 - 3 \mid z \mid^3 - 7 \mid z \mid \geq 5 - (\frac{1}{2})^8 - 3(\frac{1}{2})^3 - 7\,\frac{1}{2} = \frac{287}{256} > 1.$$

Veamos ahora que todos los ceros de $P$ están en $D(0, \frac{3}{2})$. Consideremos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = z^8 + 3z^3 + 7z + 5$$

y

$$g(z) = z^8 + 7z.$$

Notemos que, para $\mid z \mid = \frac{3}{2}$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid = \mid 3z^3 + 5 \mid \leq 3 \mid z \mid^3 + 5 = 3(\frac{3}{2})^3 + 5 = \frac{121}{8} = \frac{3872}{256},$$

y

$$\mid g(z) \mid = \mid z^8 + 7z \mid \geq \mid z \mid^8 - 7 \mid z \mid = (\frac{3}{2})^8 - 7\,\frac{3}{2} = \frac{3873}{256}.$$

Luego

$$\mid f(z) - g(z) \mid < \mid g(z) \mid,$$

y por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0, \frac{3}{2})$. Como quiera que los ceros de $g$ son 8 (a saber, $z = 0$ y $z$ igual a una de las raíces séptimas de $-7$) y todos ellos están en $D(0, \frac{3}{2})$, se sigue que los 8 ceros de $f$ están en $D(0, \frac{3}{2})$.

En conclusión, los 8 ceros de $P$ están en el anillo $A(0; \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Estudiemos el número de ceros de $P$ en el primer cuadrante. El primer cuadrante es la región angular determinada por

$$\alpha = 0 \ \text{ y } \ \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{i0}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que, si $t \leq 0$, entonces

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^8 + 3(-it)^3 + 7(-it) + 5 =$$

$$t^8 + 3it^3 - 7it + 5 = (t^8 + 5) + i(3t^3 - 7t),$$

y si $t \geq 0$, entonces

$$\varphi(t) = P(t) = t^8 + 3t^3 + 7t + 5.$$

Luego $\varphi$ está valuada en el semiplano de la derecha, y por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = arctg\,\frac{Im\,\varphi(t)}{Re\,\varphi(t)} = \begin{cases} arctg\,\frac{3t^3-7t}{t^8+5} & si \quad t \leq 0 \\ 0 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} arctg\, \frac{3t^3 - 7t}{t^8 + 5} = arctg\, 0 = 0,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} 0 = 0,$$

se sigue que el número de ceros de $P$ en el primer cuadrante es

$$\frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{8\frac{\pi}{2}}{2\pi} = 2.$$

■

**Ejercicio Propuesto 276**
*Prueba que todos los ceros del polinomio* $P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6$ *pertenecen al anillo* $A(0; 1, \frac{7}{2})$ *y determinar cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.*

**Solución.**
Empecemos notando que $P$ no tiene ceros en $\overline{D}(0,1)$. En efecto, si $z_0$ es tal que $\mid z_0 \mid = 1$ y $z_0^6 - 3z_0^5 + 2z_0^2 + 6 = 0$, entonces $\mid z_0^6 - 3z_0^5 + 2z_0^2 \mid = 6$, y por tanto $z_0^6 = -z_0^5 = -z_0^5 = -z_0^5 = z_0^2 = z_0^2$, de donde se sigue que $z_0 = -1$. Pero $P(-1) = 12 \neq 0$. Luego $P$ no se anula en $C(0,1)$.

Consideremos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6$$

y

$$g(z) = 6.$$

Notemos que, para $\mid z \mid = 1$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid = \mid z^6 - 3z^5 + 2z^2 \mid \leq \mid z \mid^6 + 3 \mid z \mid^5 + 2 \mid z \mid^2 = 6 = \mid g(z) \mid .$$

Teniendo en cuenta que hemos probado antes que $\mid f(z) \mid > 0, \quad \forall z \in C(0,1)$ se sigue que

$$\mid f(z) - g(z) \mid < \mid f(z) \mid + \mid g(z) \mid, \quad \forall z \in C(0,1).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. Luego $f$ no se anula en $D(0,1)$.

Veamos ahora que todos los ceros de $P$ están en $D(0, \frac{7}{2})$. Consideremos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6$$

y

$$g(z) = z^6.$$

Notemos que, para $\mid z \mid = \frac{7}{2}$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid = \mid -3z^5 + 2z^2 + 6 \mid \leq 3 \mid z \mid^5 + 2 \mid z \mid^2 + 6 \leq$$

$$3(\frac{7}{2})^5 + 2(\frac{7}{2})^2 + 6 = \frac{51397}{32} = \frac{102794}{64},$$

y

$$\mid g(z) \mid = (\frac{7}{2})^6 = \frac{117649}{64}.$$

Luego

$$\mid f(z) - g(z) \mid < \mid g(z) \mid, \quad \forall z \in C(0, \frac{7}{2}).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0, \frac{7}{2})$. Como quiera que los ceros de $g$ son 6 (a saber, $z = 0$ es el único cero de $g$ con multiplicidad 6) y todos ellos están en $D(0, \frac{7}{2})$, se sigue que los 6 ceros de $f$ están en $D(0, \frac{7}{2})$.

En conclusión, los 6 ceros de $P$ están en el anillo $A(0; 1, \frac{7}{2})$.

Vamos a estudiar el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha. Esta región angular está determinada por

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^6 - 3(-it)^5 + 2(-it)^2 + 6 =$$

$$-t^6 + 3it^5 - 2t^2 + 6 = (-t^6 - 2t^2 + 6) + i3t^5.$$

Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = -t^6 - 2t^2 + 6 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = 3t^5.$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = 0$ | 6 | 0 | 6 |
| $0 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el tercer cuadrante, atraviesa el eje real por el punto 6 (para $t = 0$), y sale de escena por el segundo cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t))$$

Como quiera que

$$\lim_{t \to -\infty} \theta(t) = \lim_{t \to -\infty} \left( -\pi + arctg\, \frac{3t^5}{-t^6 - 2t^2 + 6} \right) = -\pi + arctg\, 0 = -\pi,$$

y

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \left( \pi + arctg\, \frac{3t^5}{-t^6 - 2t^2 + 6} \right) = \pi + arctg\, 0 = \pi,$$

y $P$ tiene grado $n = 6$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t \to +\infty} \theta(t) - \lim_{t \to -\infty} \theta(t)) = \frac{6\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\pi - (-\pi)) = 3 + 1 = 4.$$

■

**Ejercicio Propuesto 277**

*Determina el número de ceros del polinomio $P(z) = 2z^6 - z^3 + 4z + 1$ en el semiplano de la derecha.*

**Solución.**
El semiplano de la derecha es la región angular determinada por los ángulos

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = 2(-it)^6 - (-it)^3 + 4(-it) + 1 = -2t^6 - it^3 - 4it + 1 =$$

$$(-2t^6 + 1) + i(-t^3 - 4t) = (-2t^6 + 1) + i(-t(t + 4)).$$

Pot tanto

$$Re\,\varphi(t) = -2t^6 + 1 \text{ y } Im\,\varphi(t) = -t(t + 4).$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -4, 0$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < -4$ | $-$ (\| $t$ \| grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. (\| $t$ \| grande) |
| $t = -4$ | $-8191$ | 0 | $-8191$ |
| $-4 < t < 0$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 0$ | 1 | 0 | 1 |
| $0 < t$ | $-$ (\| $t$ \| grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. (\| $t$ \| grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el tercer cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-8191$ (para $t = -4$), se pasea por el semiplano superior, atraviesa el eje real por el punto 1 (para $t = 0$), y sale de escena por el tercer cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t < -4 \\ -2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad -4 \geq t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty}\theta(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(-\pi+arctg\,\frac{-t^3-4t}{-2t^6+1}\right)=-\pi+arctg\,0=-\pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-2\pi-\pi+arctg\,\frac{-t^3-4t}{-2t^6+1}\right)=-3\pi+arctg\,0=-3\pi,$$

y $P$ es un polinomio de grado $n=6$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty}\theta(t)-\lim_{t\to-\infty}\theta(t))=\frac{6\pi}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(-3\pi+\pi)=3-1=2.$$

■

**Ejercicio Propuesto 278**
*Determina el número de ceros del polinomio* $z^5+5z^3+11z^2+4z+1$ *en el semiplano de la derecha y en el disco unidad.*

**Solución.**
El semiplano derecho es la región angular determinada por los ángulos

$$\alpha=-\frac{\pi}{2}\ \text{ y }\ \beta=\frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t)=\begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si\quad t\le 0\\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si\quad t\ge 0\end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t)=P(-it)=(-it)^5+5(-it)^3+11(-it)^2+4(-it)+1=$$

$$-it^5+5it^3-11t^2-4it+1=(-11t^2+1)+i(-t(t^4-5t^2+4))$$

Puesto que

$$t^4-5t^2+4=0\quad\Leftrightarrow\quad t^2=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$$

y por tanto

$$t^4 - 5t^2 + 4 = (t^2 - 1)(t^2 - 4) = (t-1)(t+1)(t-2)(t+2),$$

se sigue que

$$Re\,\varphi(t) = -11t^2 + 1 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = -t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2).$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2, -1, 0, 1, 2$$

y además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < -2$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = -2$ | $-43$ | $0$ | $-43$ |
| $-2 < t < -1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = -1$ | $-10$ | $0$ | $-10$ |
| $-1 < t < 0$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 0$ | $1$ | $0$ | $1$ |
| $0 < t < 1$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = 1$ | $-10$ | $0$ | $-10$ |
| $1 < t < 2$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 2$ | $-43$ | $0$ | $-43$ |
| $2 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-43$ (para $t = -2$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-10$ (para $t = -1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto 1 (para $t = 0$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto $-10$ (para $t = 1$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto $-43$ (para $t = 2$), y sale de escena por el tercer cuadrante. Por tanto un argumento continuo para $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si \quad t \leq -2 \\ 2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad -2 \leq t < -1 \\ arg(\varphi(t)) & si \quad -1 \leq t < 1 \\ -2\pi + arg(\varphi(t)) & si \quad 1 \leq t \leq 2 \\ arg(\varphi(t)) & si \quad 2 < t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty}\theta(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(\pi+arctg\,\frac{-t^5+5t^3-4t}{-11t^2+1}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\pi+arctg\,\frac{-t^5+5t^3-4t}{-11t^2+1}\right)=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

y $P$ tiene grado $n=5$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty}\theta(t)-\lim_{t\to-\infty}\theta(t))=\frac{5\pi}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=4.$$

Veamos el número de ceros de $P$ en el disco unidad. Consideremos las funciones enteras

$$f(z)=P(z)=z^5+5z^3+11z^2+4z+1$$

y

$$g(z)=11z^2.$$

Notemos que, para $z$ con $\mid z\mid=1$, tenemos que

$$\mid f(z)-g(z)\mid=\mid z^5+5z^3+4z+1\mid\leq\mid z\mid^5+5\mid z\mid^3+4\mid z\mid+1=$$
$$11=\mid 11z^2\mid=\mid g(z)\mid.$$

Para $z$ con $\mid z\mid=1$, analicemos la igualdad

$$\mid z^5+5z^3+4z+1\mid=11.$$

Sabemos que entonces

$$z^5=z^3=z=1,$$

y por tanto $z=1$. Ahora bien, $f(1)=22>0$. Luego

$$\mid f(z)-g(z)\mid<\mid g(z)\mid,\quad\forall z\in C(0,1).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. Luego $P$ tiene 2 ceros en $D(0,1)$.

■

**Ejercicio Propuesto 279**
*Determina el número de ceros del polinomio* $z^8-4z^5+z^2-2$.

*a) En el anillo $A(0;1,2)$.*

*b) En el semiplano de la derecha.*

**Solución.**
**a)** Empecemos probando que

$$P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 2$$

no se anula en $C(0,1)$. Notemos que para $z \in C(0,1)$ se tiene que

$$P(z) = 0 \Rightarrow z^8 - 4z^5 + z^2 - 2 = 0 \Rightarrow z^8 + z^2 - 2 = 4z^5 \Rightarrow$$

$$| z^8 + z^2 - 2 |= 4 \Rightarrow z^8 = z^2 = -1 = -1,$$

lo cual es imposible. Así pues, $P$ no se anula en $C(0,1)$.

Para determinar el número de ceros de $P$ en el disco unidad consideremos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 2$$

y

$$g(z) = -4z^5.$$

Notemos que, para $z$ con $| z |= 1$, tenemos que

$$| f(z) - g(z) |=| z^8 + z^2 - 2 |\leq | z |^8 + | z |^2 +2 = 4 =$$

$$| 4z^5 |=| g(z) | .$$

Ahora bien, para $z$ con $| z |= 1$, del argumento seguido para probar que $P$ no tiene ceros en $C)0,1)$ se tiene que la desigualdad

$$| z^8 + z^2 - 2 |\leq 4$$

es estricta. Luego

$$| f(z) - g(z) |<| g(z) |, \quad \forall z \in C(0,1).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. Luego $P$ tiene 5 ceros en $D(0,1)$.

Para determinar el número de ceros de $P$ en el disco $D(0,2)$ notamos que cuando $| z |= 2$ el monomio que "manda" es $z^8$, por lo que consideramos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 2$$

y

$$g(z) = z^8.$$

Notemos que, para $z$ con $\mid z \mid = 2$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid = \mid -4z^5 + z^2 - 2 \mid \leq 4 \mid z \mid^5 + \mid z \mid^2 + 2 = 134 <$$

$$256 = \mid z \mid^8 = \mid g(z) \mid .$$

Luego

$$\mid f(z) - g(z) \mid < \mid g(z) \mid, \quad \forall z \in C(0,2).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,2)$. Luego $P$ tiene sus 8 ceros en $D(0,2)$.

En conclusión, $P$ tiene 3 ceros en el anillo $A(0;1,2)$.

**b)** El semiplano derecho es la región angular determinada por los ángulos

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^8 - 4(-it)^5 + (-it)^2 - 2 = t^8 + 4it^5 - t^2 - 2 =$$

$$t^8 - t^2 - 2 + i4t^5.$$

Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = t^8 - t^2 - 2 \text{ y } Im\,\varphi(t) = 4t^5.$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.$$

Además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $+$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $4^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = 0$ | $-2$ | $0$ | $-2$ |
| $0 < t$ | $+$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $1^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el cuarto cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-2$ (para $t = 0$), y sale de escena por el primer cuadrante. Por tanto un argumento continuo de $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg_0(\varphi(t)).$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} \left(2\pi + arctg\, \frac{4t^5}{t^8 - t^2 - 2}\right) = 2\pi + arctg\, 0 = 2\pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} arctg\, \frac{4t^5}{t^8 - t^2 - 2} = arctg\, 0 = 0,$$

y el grado de $P$ es $n = 8$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)) = \frac{8\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(0 - 2\pi) = 4 - 1 = 3.$$

■

**Ejercicio Propuesto 280**

*Determina el número de ceros del polinomio* $P(z) = 2z^5 + 4z - 1$.

*a) En el anillo* $A(0; 1, 2)$;

*b) En el semiplano de la derecha.*

**Solución.**

**a)** Para determinar el número de ceros de $P$ en el disco $D(0, 2)$ notamos que cuando $\mid z \mid= 2$ el monomio que "manda" es $2z^5$, por lo que consideramos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = 2z^5 + 4z - 1$$

y

$$g(z) = 2z^5.$$

Notemos que, para $z$ con $\mid z \mid= 2$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid=\mid 4z - 1 \mid\leq 4 \mid z \mid +1 = 9 < 64 = 2 \mid z \mid^5=\mid g(z) \mid .$$

Luego

$$| f(z) - g(z) |<| g(z) |, \quad \forall z \in C(0,2).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,2)$. Luego $P$ tiene sus 5 ceros en $D(0,2)$.

Estudiemos ahora el número de ceros de $P$ en el disco cerrado $\overline{D}(0,1)$. Fijemos $\varepsilon > 0$ "pequeño", y consideremos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = 2z^5 + 4z - 1$$

y

$$g(z) = 4z.$$

Notemos que, para $z$ con $| z |= 1 + \varepsilon$, tenemos que

$$| f(z) - g(z) |=| 2z^5 - 1 |\leq 2 | z |^5 +1 = 2(1+\varepsilon)^5 + 1 < 4 <$$

$$4(1+\varepsilon) = 4 | z |=| g(z) | .$$

Luego

$$| f(z) - g(z) |<| g(z) |, \quad \forall z \in C(0,1+\varepsilon).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en el disco $D(0,1+\varepsilon)$. Luego $P$ tiene 1 cero en $D(0,1+\varepsilon)$. Variando $\varepsilon$ se deduce que $P$ tiene un cero en $\overline{D}(0,1)$.

Veamos de otra manera que $P$ tiene un cero en $\overline{D}(0,1)$.
Empecemos notando que, para $z \in C(0,1)$ se tiene que

$$P(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z^5 + 4z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z^5 + 4z = 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 =| 2z^5 + 4z |= 2 | z || z^4 + 2 |= 2 | z^4 + 2 |\geq 2(2- | z^4 |) = 2,$$

lo cual es imposible. Luego $P$ no se anula en $C(0,1)$.
Además, si consideramos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = 2z^5 + 4z - 1 \;\text{ y }\; g(z) = 4z,$$

y notamos que para $| z |= 1$ se verifica que

$$| f(z) - g(z) |=| 2z^5 - 1 |\leq 2 | z |^5 +1 = 3 < 4 =| 4z |=| g(z) |,$$

podemos afirmar, por el Teorema de Rouché, que

[No. de ceros de $P$ en $D(0,1)$] = [No. de ceros de $g$ en $D(0,1)$] = 1.

Luego $P$ tiene un cero en el disco $\overline{D}(0,1)$.

En conclusión, $P$ tiene 4 ceros en el anillo $A(0;1,2)$.

**b)** El semiplano derecho es la región angular determinada por los ángulos

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = 2(-it)^5 + 4(-it) - 1 = -2it^5 - 4it - 1 =$$

$$-1 + i(-2t^5 - 4t) = -1 + i(-2t(t^4+2)).$$

Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = -1 \text{ y } Im\,\varphi(t) = -2t(t^4+2).$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.$$

Además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t<0$ | $-1$ | $+$ | $2^o$ Cuadr. |
| $t=0$ | $-1$ | $0$ | $-1$ |
| $0<t$ | $-1$ | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-1$ (para $t=0$), y sale de escena por el tercer cuadrante. De hecho, $\varphi$ se pasea por la recta $Re\,z = -1$. Por tanto un argumento continuo de $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg_0(\varphi(t)) = \pi + arctg\,(2t^5 + 4t).$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \lim_{t\to-\infty} \left(\pi + arctg\,(2t^5+4t)\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}\pi+arctg\,(2t^5+4t)=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2},$$

y $P$ tiene grado $n=5$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty}\theta(t)-\lim_{t\to-\infty}\theta(t))=$$

$$\frac{5\pi}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}[\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}]=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3.$$

■

**Ejercicio Propuesto 281**
*Determina el número de ceros del polinomio* $P(z)=z^4-z^2+2z+4$.

*a) En el disco unidad;*

*b) En el primer cuadrante.*

**Solución.**
**a)** Para determinar el número de ceros de $P$ en el disco $D(0,1)$ notamos que cuando $\mid z\mid=1$ es monomio que "manda" es 4, por lo que consideramos las funciones enteras

$$f(z)=P(z)=z^4-z^2+2z+4$$

y

$$g(z)=4.$$

Notemos que, para $z$ con $\mid z\mid=1$, tenemos que

$$\mid f(z)-g(z)\mid=\mid z^4-z^2+2z\mid\leq\mid z\mid^4+\mid z\mid^2+2\mid z\mid=4=\mid g(z)\mid.$$

Ahora bien, para $z$ con $\mid z\mid=1$, se tiene que

$$\mid z^4-z^2+2z\mid=4\quad\Rightarrow\quad z^4=-z^2=z=z,$$

lo cual es imposible. Luego

$$\mid f(z)-g(z)\mid<\mid g(z)\mid,\quad\forall z\in C(0,1).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. Luego $P$ no tiene ceros en $D(0,1)$.

**b)** El primer cuadrante es la región angular determinada por los ángulos

$$\alpha = 0 \ \text{ y } \ \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(t) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que para $t \leq 0$ se tiene que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^4 - (-it)^2 + 2(-it) + 4 = t^4 + t^2 - 2it + 4 =$$

$$t^4 + t^2 + 4 + i(-2t).$$

Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = t^4 + t^2 + 4 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = -2t.$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.$$

Para $0 \leq t$ se tiene que

$$\varphi(t) = t^4 - t^2 + 2t + 4 = (t^2 - \frac{1}{2})^2 + 2t + \frac{15}{4} > \frac{15}{4}.$$

Además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < 0$ | $+$ | $+$ | $1^{er}$ Cuadr. |
| $t = 0$ | 4 | 0 | $-1$ |
| $0 < t$ | $+$ | 0 | Semirecta real posit. |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el primer cuadrante, entra en contacto con el eje real en el punto 4 (para $t = 0$), y después de pasearse por la semirecta real de origen $\frac{15}{4}$, sale de escena yéndose a $+\infty$. Por tanto un argumento continuo de $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = arg(\varphi(t)) = \begin{cases} arctg\,\frac{-2t}{t^4+t^2+4} & si \quad t \leq 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty}\theta(t)=\lim_{t\to-\infty} arctg\,\frac{-2t}{t^4+t^2+4}=arctg\,0=0,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}0=0,$$

y $P$ tiene grado $n=4$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el primer cuadrante es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty}\theta(t)-\lim_{t\to-\infty}\theta(t))=$$

$$\frac{4\frac{\pi}{2}}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(0-0)=1.$$

■

**Ejercicio Propuesto 282**
*Prueba que todos los ceros del polinomio $P(z)=z^6-z^3-4z+6$ pertenecen al anillo $A(0;1,2)$y determínese cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.*

**Solución.**
**a)** Empecemos probando que $P$ no se anula en $C(0,1)$. Notemos que para $z\in C(0,1)$ se tiene que

$$P(z)=0\ \Rightarrow\ z^6-z^3-4z+6=0\ \Rightarrow\ z^6-z^3-4z=-6\ \Rightarrow$$

$$\mid z^6-z^3-4z\mid=6\ \Rightarrow\ z^6=-z^3=-z=-z=-z=-z\ \Rightarrow$$

$$z^3=-1\quad \text{y}\quad z^2=1\quad\Rightarrow\quad z=-1.$$

Ahora bien, $P(-1)=12$. Así pues, $P$ no se anula en $C(0,1)$.

Para determinar el número de ceros de $P$ en el disco unidad consideremos las funciones enteras

$$f(z)=P(z)=z^6-z^3-4z+6$$

y

$$g(z)=6.$$

Notemos que, para $z$ con $\mid z \mid= 1$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid=\mid z^6 - z^3 - 4z \mid\leq\mid z \mid^6 + \mid z \mid^3 +4 \mid z \mid= 6 =\mid g(z) \mid .$$

Ahora bien, para $z$ con $\mid z \mid= 1$, del argumento seguido para probar que $P$ no tiene ceros en $C(0, 1)$ se tiene que la desigualdad

$$\mid z^6 - z^3 - 4z \mid\leq 6$$

es estricta. Luego

$$\mid f(z) - g(z) \mid<\mid g(z) \mid, \quad \forall z \in C(0, 1).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0, 1)$. Luego $P$ no tiene ceros en $D(0, 1)$.

Para determinar el número de ceros de $P$ en el disco $D(0, 2)$ notamos que cuando $\mid z \mid= 2$ el monomio que "manda" (que produce mayor módulo) es $z^6$, por lo que consideramos las funciones enteras

$$f(z) = P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$$

y

$$g(z) = z^6.$$

Notemos que, para $z$ con $\mid z \mid= 2$, tenemos que

$$\mid f(z) - g(z) \mid=\mid -z^3 - 4z + 6 \mid\leq\mid z \mid^3 +4 \mid z \mid +6 = 22 <$$

$$64 =\mid z \mid^6=\mid g(z) \mid .$$

Luego

$$\mid f(z) - g(z) \mid<\mid g(z) \mid, \quad \forall z \in C(0, 2).$$

Por el Teorema de Rouché, $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0, 2)$. Luego $P$ tiene sus 6 ceros en $D(0, 2)$.

En conclusión, $P$ tiene sus 6 ceros en el anillo $A(0; 1, 2)$.

**b)** El semiplano derecho es la región angular determinada por los ángulos

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \ \text{ y } \ \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P(-te^{i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \leq 0 \\ P(te^{-i\frac{\pi}{2}}) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\varphi(t) = P(-it) = (-it)^6 - (-it)^3 - 4(-it) + 6 = -t^6 - it^3 + 4it + 6 =$$

$$-t^6 + 6 + i(-t(t^2 - 4)) = -t^6 + 6 + i(-t(t-2)(t+2)).$$

Por tanto

$$Re\,\varphi(t) = -t^6 + 6 \ \text{ y } \ Im\,\varphi(t) = -t(t-2)(t+2).$$

Se tiene entonces que

$$Im\,\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2, 0, 2.$$

Además

| $t$ | $Re\,\varphi(t)$ | $Im\,\varphi(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $t < -2$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $+$ | $2^o$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |
| $t = -2$ | $-58$ | $0$ | $-58$ |
| $-2 < t < 0$ | | $-$ | Semiplano Inferior |
| $t = 0$ | $6$ | $0$ | $6$ |
| $0 < t < 2$ | | $+$ | Semiplano Superior |
| $t = 2$ | $-58$ | $0$ | $-58$ |
| $2 < t$ | $-$ ($\mid t \mid$ grande) | $-$ | $3^{er}$ Cuadr. ($\mid t \mid$ grande) |

Resumiendo $\varphi$ entra en escena por el segundo cuadrante, atraviesa el eje real por el punto $-58$ (para $t = -2$), se pasea por el semiplano inferior, atraviesa el eje real por el punto 6 (para $t = 0$), se pasea por el semiplano superior, vuelve a atravesar el eje real por el punto $-58$ (para $t = 2$), y sale de escena por el terser cuadrante. Por tanto un argumento continuo de $\varphi$ viene dado por la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} arg(\varphi(t)) & si & t \leq -2 \\ 2\pi + arg(\varphi(t)) & si & -2 < t \leq 2 \\ 4\pi + arg(\varphi(t)) & si & 2 < t \end{cases}$$

Como quiera que

$$\lim_{t\to-\infty}\theta(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(\pi+arctg\,\frac{-3t^3+4t}{-t^6+6}\right)=\pi+arctg\,0=\pi,$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(4\pi-\pi+arctg\,\frac{-3t^3+4t}{-t^6+6}\right)=3\pi+arctg\,0=3\pi,$$

y el grado de $P$ es $n=6$, se sigue que el número de ceros de $P$ en el semiplano de la derecha es

$$\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\lim_{t\to+\infty}\theta(t)-\lim_{t\to-\infty}\theta(t))=\frac{6\pi}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(3\pi-\pi)=3+1=4.$$

■

**Ejercicio Propuesto 283**
*Dado $0<\rho<1$, prueba que, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, el polinomio*

$$P_n(z)=1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}$$

*no se anula en el disco $D(0,\rho)$.*

**Solución.**
Notemos que para todo natural $n$ se verifica que $P_n(z)=Q'_n(z)$, donde

$$Q_n(z)=1+z+...+z^n.$$

Consideremos la función

$$f(z)=\frac{1}{1-z},\quad \forall z\in D(0,1).$$

Sabemos que $\{Q_n\}$ converge a $f$ uniformemente en los compactos del disco $D(0,1)$. Por el Teorema de convergencia de Weierstrass, $\{P_n\}$ converge a $f'$ uniformemente en los compactos del disco $D(0,1)$, y en particular $\{P_n\}$ converge a $f'$ uniformemente en el disco cerrado $\overline{D}(0,\rho)$. Como

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}\neq 0,\quad \forall z\in C(0,\rho),$$

por el Corolario 4.56 del Teorema de Rouché, existe un número natural $m$ tal que para todo $n \geq m$ se verifica que $P_n$ y $f'$ tienen el mismo número de ceros en $D(0, \rho)$, es decir, ninguno.

■

**Ejercicio Propuesto 284**
*Dado $\rho > 0$, prueba que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todos los ceros de la función*

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + ... + \frac{1}{n!z^n}$$

*se hallan en el disco $D(0, \rho)$.*

**Solución.**
Para cada natural $n$ consideremos el polinomio

$$P_n(z) = 1 + \frac{1}{1}z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n,$$

y notemos que

$$f_n(z) = P_n(\frac{1}{z}), \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Sabemos que $\{P_n\}$ converge a $exp$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$, y en particular $\{P_n\}$ converge a $exp$ uniformemente en el disco cerrado $\overline{D}(0, \frac{1}{\rho})$. Como

$$exp(z) \neq 0, \quad \forall z \in C(0, \frac{1}{\rho}),$$

por el Corolario 4.56 del Teorema de Rouché, existe un número natural $m$ tal que para todo $n \geq m$ se verifica que $P_n$ y $exp$ tienen el mismo número de ceros en $\overline{D}(0, \frac{1}{\rho})$, es decir, ninguno. Luego existe un número natural $m$ tal que para todo $n \geq m$ se verifica que $P_n$ tiene sus ceros en el anillo $A(0; \frac{1}{\rho}, +\infty)$, y por tanto $f_n$ tiene todos sus ceros en el anillo $A(0; 0, \rho)$.

■

**Ejercicio Propuesto 285. (Representación integral de la inversa)**
*Sea $\Omega$ un dominio y $f$ una función holomorfa e inyectiva en $\Omega$. Sea $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Justifica que para todo $w \in f(D(a, r))$ se verifica que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, dz = f^{-1}(w).$$

**Solución.**
Fijemos $w \in f(D(a,r))$. La función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = f(z) - w$$

es holomorfa e inyectiva en $\Omega$. Además, puesto que por el Corolario 3.35, $f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega$, se sigue que también $F'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega$. En consecuencia, todos los ceros de $F$ serán ceros simples. Vamos a calcularlos.

$$F(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(z) - w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = w$$

(teniendo en cuenta que $f$ es inyectiva)

$$\Leftrightarrow \quad z = f^{-1}(w).$$

Así, la función $F$ tiene un único cero simple en $f^{-1}(w)$. Por el Principio del Argumento Generalizado tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{F'(z)}{F(z)}\, z\, dz = f^{-1}(w),$$

esto es,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z\, dz = f^{-1}(w).$$

■

**Ejercicio Propuesto 286**
*Calcula, usando el principio de argumento generalizado, las integrales*

$$\int_{C(0,1)} ze^z tg(\pi z)\, dz$$

$$\int_{C(0,1)} \frac{cosh\, z}{tg\, z}\, dz$$

$$\int_{C(0,3)} \frac{sen\,(\pi z/2)(3z^2 - 4z - 1)}{z^3 - 2z^2 - z + 2}\, dz$$

**Solución.**

$$I_1 = \int_{C(0,1)} ze^z tg(\pi z)\, dz = \int_{C(0,1)} \frac{sen(\pi z)}{cos(\pi z)}\, ze^z\, dz =$$
$$-\frac{1}{\pi} \int_{C(0,1)} \frac{-\pi\, sen(\pi z)}{cos(\pi z)}\, ze^z\, dz.$$

Como quiera que $f(z) = cos(\pi z)$ es entera y se anula en el conjunto

$$\{\frac{1}{2} + k \ : \ k \in \mathbb{Z}\},$$

y en cada uno de estos puntos tiene un cero de orden 1, y puesto que en la región interior de la circunferencia $C(0,1)$ únicamente se encuentran los ceros $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, se sigue del Principio del Argumento Generalizado que

$$I_1 = -\frac{1}{\pi}\, 2\pi i \left[ -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \right] = i\left( e^{-\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}} \right).$$

$- - - - -$

$$I_2 = \int_{C(0,1)} \frac{cosh\, z}{tg\, z}\, dz = \int_{C(0,1)} \frac{cos\, z}{sen\, z}\, cosh\, z\, dz.$$

Como en la región interior de $C(0,1)$, la función $sen\, z$ tiene un único cero simple en 0, por el Principio del Argumento se sigue que

$$I_2 = 2\pi i\, cosh\, 0 = 2\pi i.$$

$- - - - -$

$$I_3 = \int_{C(0,3)} \frac{sen\,(\pi z/2)(3z^2 - 4z - 1)}{z^3 - 2z^2 - z + 2}\, dz.$$

Por Rufini se obtiene que

$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = (z-2)(z-1)(z+1).$$

Luego los tres ceros de $z^3-2z^2-z+2$ son $-1, 1, 2$, son ceros simples, y están en la región interior de $C(0,3)$. Por el Principio del Argumento Generalizado se tiene que

$$I_3 = 2\pi i \left[ sen\,(-\frac{\pi}{2}) + sen\,\frac{\pi}{2} + sen\,\pi \right] = 2\pi i\,(-1+1+0) = 0.$$

■

**Ejercicio Propuesto 287**
*Calcula, usando el principio de argumento generalizado, las siguientes integrales*

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^3+1} \qquad \int_{C(1,1/5)} \frac{3(z-1)^2-1}{z^3-3z^2+4z-2}\,dz$$

**Solución.**

$$I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^3+1} = \int_{C(0,2)} \frac{\frac{1}{z^3}}{1+\frac{1}{z^3}}\,dz.$$

Puesto que

$$\frac{d}{dz}\left(1+\frac{1}{z^3}\right) = \frac{-3z2}{z^6} = -\frac{3}{z^4},$$

interesa escribir

$$I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{\frac{-3}{z^4}}{1+\frac{1}{z^3}}\,(-\frac{z}{3})\,dz.$$

Como $f(z) = 1+\frac{1}{z^3}$ tiene un polo de orden 3 en $z=0$ y se anula en las tres raíces cúbicas de $-1$ (llámemoslas $z_0, z_1, z_2$), teniendo en cada una de ellas un cero simple, y tanto el polo como los tres ceros están en la región interior de la circunferencia $C(0,2)$, por el Principio del Argumento Generalizado se tiene que

$$I_1 = 2\pi i \left[ -\frac{z_0}{3} - \frac{z_1}{3} - \frac{z_2}{3} - 3(-\frac{0}{3}) \right] = -\frac{2\pi i}{3}\,(z_0+z_1+z_2) = 0.$$

$- - - - -$

$$I_2 = \int_{C(1,1/5)} \frac{3(z-1)^2-1}{z^3-3z^2+4z-2}\,dz = \int_{C(1,1/5)} \frac{3(z^2-2z+1)-1}{z^3-3z^2+4z-2}\,dz =$$

$$\int_{C(1,1/5)} \frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+4z-2}\,dz = \int_{C(1,1/5)} \frac{3z^2-6z+4}{z^3-3z^2+4z-2}\,\frac{3z^2-6z+2}{3z^2-6z+4}\,dz.$$

Llamemos

$$f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2.$$

Por Rufini

$$f(z) = (z-1)(z^2-2z+2).$$

Puesto que

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i,$$

se sigue que

$$f(z) = (z-1)(z-(1+i))(z-(1-i)).$$

Nótese que $z = 1$ es el único cero de $f$ que está en la región interior de la circunferencia $C(1, \frac{1}{5})$.

Consideremos la función meromorfa

$$g(z) = \frac{3z^2-6z+2}{3z^2-6z+4}.$$

Puesto que

$$3z^2 - 6z + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{6} = 1 \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{3},$$

se sigue que $g$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{1+i\,\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-i\,\frac{\sqrt{3}}{3}\}$, que contiene a $C(1, \frac{1}{5})$. Por el Principio del Argumento Generalizado

$$I_2 = 2\pi i\, g(1) = 2\pi i\,\frac{-1}{1} = -2\pi i.$$

■

**Ejercicio Propuesto 288**

*Demuestra el teorema de la aplicación abierta a partir del principio del argumento.*

**Solución.**
Sea $\Omega$ un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Veamos que $f$ es abierta, usando el Principio del Argumento.

Dado $a \in \Omega$, veamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$D(f(a), \varepsilon) \subseteq f(\Omega).$$

Consideremos la función holomorfa $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = f(z) - f(a).$$

Como $f$ no es constante, también $F$ es no constante, luego $a$ es un cero aislado de $F$, y por tanto podemos fijar $\delta > 0$ tal que

$$\overline{D}(a, \delta) \subseteq \Omega \;\; \text{y} \;\; F(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{D}(a, \delta) \backslash \{a\},$$

y por tanto

$$f(z) \neq f(a), \quad \forall z \in \overline{D}(a, \delta) \backslash \{a\}.$$

Por el Principio del Argumento, si $m$ es el orden del cero $f(a)$ para $F$, tenemos que

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\delta)} \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = Ind_{F \circ C(a,\delta)}(0) =$$

$$Ind_{f \circ C(a,\delta) - f(a)}(0) = Ind_{f \circ C(a,\delta)}(f(a)).$$

Luego $f(a)$ está en una componente conexa $C$ de $\mathbb{C} \backslash (f \circ C(a, \delta))^*$. Como $C$ es abierto, existirá $\varepsilon > 0$ tal que

$$D(f(a), \varepsilon) \subseteq C.$$

Dado $w \in D(f(a), \varepsilon)$, tenemos entonces que

$$m = Ind_{f \circ C(a,\delta)}(w) = Ind_{f \circ C(a,\delta) - w}(0).$$

Por el Principio del Argumento, $m$ coincide con el número de ceros de la función $z \mapsto f(z) - w$ en la región interior de $C(a, \delta)$, y por tanto $w$ es un valor tomado por $f$ en un punto de la región interior de $C(a, \delta)$. Luego $w \in f(\Omega)$.

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 289**
*Demuestra el teorema del comportamiento local de una función holomorfa (teorema 3.34) a partir del principio del argumento.*

**Solución.**
Sean $\Omega$ un dominio de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante, y $a \in \Omega$. Si $m$ es el orden del cero que tiene en el punto $a$ la función holomorfa $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por
$$F(z) = f(z) - f(a),$$
veamos (usando el Principio del Argumento) que en un entorno de $a$ la aplicación $f$ es $m$ a 1.

Como $f$ es no constante, también $F$ es no constante, luego $a$ es un cero aislado de la función $F$, y por tanto podemos fijar $\delta > 0$ tal que
$$\overline{D}(a, \delta) \subseteq \Omega \ \text{ y } \ F(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{D}(a, \delta) \backslash \{a\},$$
y por tanto
$$f(z) \neq f(a), \quad \forall z \in \overline{D}(a, \delta) \backslash \{a\}.$$
Por el Principio del Argumento, tenemos que
$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\delta)} \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = Ind_{F \circ C(a,\delta)}(0) =$$
$$Ind_{f \circ C(a,\delta) - f(a)}(0) = Ind_{f \circ C(a,\delta)}(f(a)).$$
Luego $f(a)$ está en una componente conexa $C$ de $\mathbb{C} \backslash (f \circ C(a, \delta))^*$. Puesto que la función índice es constante en cada componente conexa, y éstas son abiertas, existirá $\varepsilon > 0$ tal que
$$D(f(a), \varepsilon) \subseteq C.$$
Dado $w \in D(f(a), \varepsilon)$, tenemos entonces que
$$m = Ind_{f \circ C(a,\delta)}(w) = Ind_{f \circ C(a,\delta) - w}(0).$$
Por el Principio del Argumento $m$ coincide con el número de ceros de la función $z \mapsto f(z) - w$ en la región interior de $C(a, \delta)$. Luego $f$ es una función $m$ a 1 de $D(a, \delta)$ en $D(f(a), \varepsilon)$.

$\blacksquare$

**Ejercicio Propuesto 290**
*Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $\Omega$. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega$ a una función $f$ que no es idénticamente nula en $\Omega$. Sea $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Prueba que hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $\Omega$ tal que $\{z_n\} \to a$ y un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(z_n) = 0$ para todo $n \geq m$.*

**Solución.**
Por el Teorema de Hurwitz,

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists m_k \in \mathbb{N} : n \geq m_k \text{ se verifica que } f_n \text{ se anula en } D(a, \frac{1}{k}) \cap \Omega.$$

Claramente podemos suponer que la aplicación $k \mapsto m_k$ es estrictamente creciente. Consideremos la sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $\Omega$ construida como sigue:

Para cada $n$ tal que $n < m_1$ tomemos $z_n = a$.

Para cada $n$ tal que $m_1 \leq n < m_2$ tomemos $z_n \in D(a, 1) \cap \Omega$ tal que

$$f_n(z_n) = 0.$$

... ... ...

Para cada $n$ tal que $m_k \leq n < m_{k+1}$ tomemos $z_n \in D(a, \frac{1}{k}) \cap \Omega$ tal que

$$f_n(z_n) = 0.$$

... ... ...

La sucesión $\{z_n\}$ así obtenida claramente converge hacia $a$ y verifica que $f_n(z_n) = 0$ para todo $n \geq m_1$.

■

**Ejercicio Propuesto 291**
*Sea $f$ una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y regular en $\infty$ tal que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ y las únicas singularidades de $f$ son los puntos $z = -1$ donde $f$ tiene un polo de orden uno y $Res(f(z), -1) = 1$, y $z = 2$ donde $f$ tiene un polo de orden 2 y $Res(f(z), 2) = -2$. Calcula $f$.*

**Solución.**
Por hipótesis $f$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1, 2\}$.

Como $f$ tiene en 2 un polo de orden 2 con $Res(f,2) = -2$ se sigue que en el anillo $A(2;0,3)$ se verifica que

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-2)^2} + \frac{-2}{z-2} + \varphi(z), \quad \text{con} \quad c_{-2} \neq 0 \quad \text{y} \quad \varphi \in \mathcal{H}(D(2,3)),$$

y por tanto

$$f(z) - \frac{c_{-2}}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2}$$

es una función holomorfa en 2.

Como $f$ tiene en $-1$ un polo de orden 1 con $Res(f,-1) = 1$ se sigue que en el anillo $A(-1;0,3)$ se verifica que

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \psi(z), \quad \text{con} \quad \psi \in \mathcal{H}(D(-1,3)),$$

y por tanto

$$f(z) - \frac{1}{z+1}$$

es una función holomorfa en $-1$.

Consideremos la función $g$ definida por

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{z+1} - \frac{c_{-2}}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2}.$$

Claramente $g$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1,2\}$. Pero, por los comentarios anteriores, $g$ puede verse como una función entera. Como quiera que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$, se sigue que también $\lim_{z\to\infty} g(z) = 1$. Por el Teorema de Liouville,

$$g(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Luego

$$f(z) = -1 + \frac{1}{z+1} + \frac{c_{-2}}{(z-2)^2} - \frac{2}{z-2}.$$

■

**Ejercicio Propuesto 292**

*Sea $f$ una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y regular en $\infty$, cuyas únicas singularidades son $z=-1$ donde $f$ tiene un polo de orden uno y $Res(f(z),-1) = 1$, y $z = 2$ donde $f$ tiene un polo de orden 2 y $Res(f(z),2) = 2$. Además $f(0) = 7/4$ y $f(1) = 5/2$. Calcula $f$ y su desarrollo de Laurent en $A(0;1,2)$.*

**Solución.**
Por hipótesis $f$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1,2\}$.

Como $f$ tiene en 2 un polo de orden 2 con $Res(f,2)=2$ se sigue que en el anillo $A(2;0,3)$ se verifica que

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{(z-2)^2}+\frac{2}{z-2}+\varphi(z), \quad \text{con} \quad c_{-2}\neq 0 \quad \text{y} \quad \varphi\in\mathcal{H}(D(2,3)),$$

y por tanto

$$f(z)-\frac{c_{-2}}{(z-2)^2}-\frac{2}{z-2}$$

es una función holomorfa en 2.

Como $f$ tiene en $-1$ un polo de orden 1 con $Res(f,-1)=1$ se sigue que en el anillo $A(-1;0,3)$ se verifica que

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\psi(z), \quad \text{con} \quad \psi\in\mathcal{H}(D(-1,3)),$$

y por tanto

$$f(z)-\frac{1}{z+1}$$

es una función holomorfa en $-1$.

Consideremos la función $g$ definida por

$$g(z)=f(z)-\frac{1}{z+1}-\frac{c_{-2}}{(z-2)^2}-\frac{2}{z-2}.$$

Claramente $g$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1,2\}$. Pero, por los comentarios anteriores, $g$ puede verse como una función entera. Como quiera que $f$ es regular en $\infty$, esto es, existe $\lim_{z\to\infty} f(z)\in\mathbb{C}$, se sigue que también $g$ es regular en $\infty$. Por el Teorema de Liouville,

$$\exists k\in\mathbb{C} \ : \ g(z)=k, \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Luego

$$f(z)=k+\frac{1}{z+1}+\frac{c_{-2}}{(z-2)^2}+\frac{2}{z-2}.$$

Como

$$f(0)=7/4 \quad \text{y} \quad f(1)=5/2,$$

se tiene que

$$k+1+\frac{c_{-2}}{4}-1=\frac{7}{4} \quad \text{y} \quad k+\frac{1}{2}+c_{-2}-2=\frac{5}{2},$$

y por tanto

$$4k + c_{-2} = 7 \quad \text{y} \quad 2k + 2c_{-2} = 8,$$

de donde se sigue que

$$k = 1 \quad \text{y} \quad c_{-2} = 3.$$

En conclusión,

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z+1} + \frac{3}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2}.$$

Calculemos el desarrollo en serie de Laurent de $f$ en el anillo $A(0;1,2)$. Para $z$ tal que $\mid z \mid > 1$ tenemos que

$$\frac{1}{z+1} = \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^n}.$$

Para $z$ tal que $\mid z \mid < 2$ tenemos que

$$\frac{2}{z-2} = -\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\, z^n.$$

Derivando obtenemos que

$$\frac{-2}{(z-2)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\, nz^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,(n+1)z^n,$$

y por tanto

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}\, z^n.$$

En consecuencia, para $z$ tal que $1 <\mid z \mid < 2$ tenemos que

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}\, z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\, z^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^n} + (1 + \frac{3}{4} - 1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{3(n+1)}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right] z^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^n}+\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+1}{2^{n+2}}\,z^n.$$

$\blacksquare$